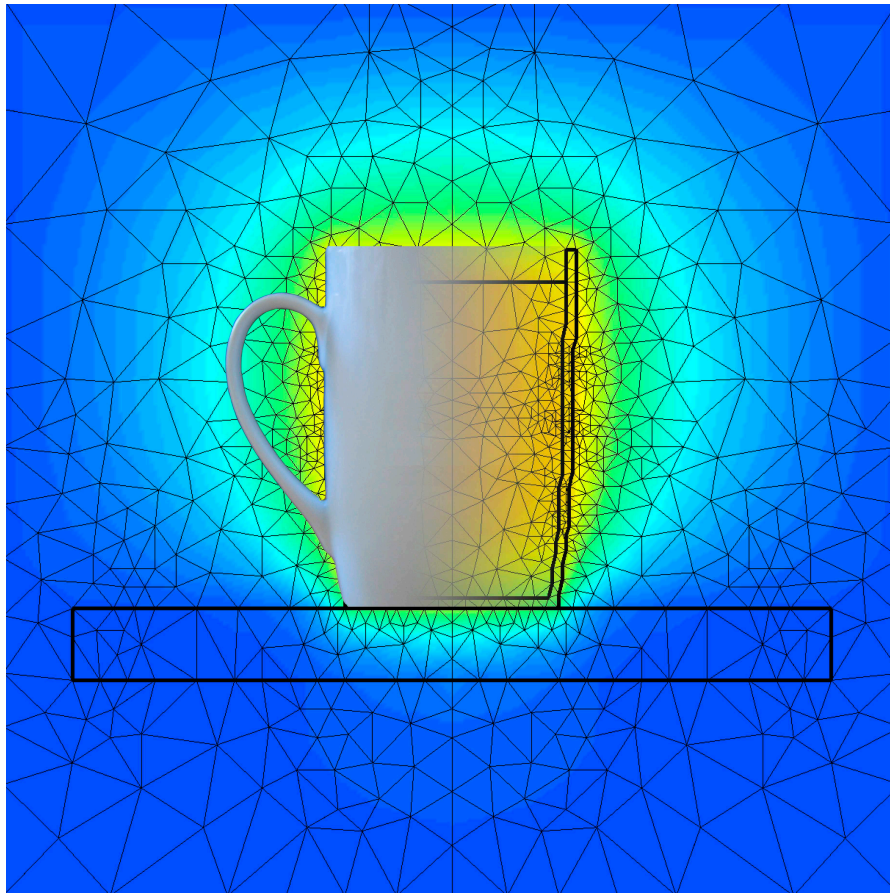


# Projekt Praktische Mathematik

## Abkühlvorgang einer Kaffeetasse

23. April 2007



R.EMMERLING	ITM,
R.MENZEL	PI,
K.KAGELMANN	PI,
A.BITTROFF	ITM

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Projektdefinition</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Physikalische Grundlagen</b>	<b>2</b>
2.1	Herleitung der Wärmeleitungsgleichung . . . . .	2
2.2	Randbedingungen . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Mathematische Modellbildung</b>	<b>5</b>
3.1	Lösungsansatz für die Wärmeleitungsdifferentialgleichung . . . . .	5
3.2	Schwache Formulierung . . . . .	5
3.3	Modellierung der Randbedingungen . . . . .	7
3.4	Methode der finiten Elemente . . . . .	7
3.4.1	Transformation auf Zylinderkoordinaten . . . . .	10
3.4.2	Die schwache Formulierung in Zylinderkoordinaten . . . . .	11
3.5	Berechnung der Elementmatrizen . . . . .	12
3.5.1	Transformation auf das Einheitsdreieck . . . . .	12
3.5.2	Bestimmung der Formfunktionen am Einheitsdreieck . . . . .	13
3.5.3	Berechnung der Elementmassenmatrix . . . . .	14
3.5.4	Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix . . . . .	14
3.5.5	Berechnung des Elementlastvektors . . . . .	17
3.6	Aufbau des Gleichungssystems . . . . .	18
3.6.1	Aufbau des Gesamtgleichungssystems mit Hilfe von Zuordnungsmatrizen . . . . .	19
3.6.2	Erläuterung anhand eines Beispiels . . . . .	20
3.6.3	Aufbau der Systemmatrizen mit Hilfe von Indextafeln . . . . .	23
3.7	Einbau der Randbedingungen . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Numerische Lösungsverfahren</b>	<b>26</b>
4.1	CRANK-NICHOLSON-Verfahren . . . . .	26
4.1.1	Anwendung auf das Anfangswertproblem . . . . .	27
4.2	CHOLESKY-Zerlegung . . . . .	28
4.3	Verwendung zur Lösung des Kaffeetassenproblems . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Programmierung und Vorgehensweise</b>	<b>30</b>
5.1	Programmtechnische Umsetzung . . . . .	30
5.2	Nassi-Shneider-Diagramme . . . . .	32
5.3	Vorgehensweise . . . . .	34
5.3.1	Der Netzgenerator . . . . .	34
5.3.2	Das C-Programm . . . . .	36
5.3.3	Das Matlab-Script . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Parameteranalyse</b>	<b>41</b>
6.1	Ein einfacher Test . . . . .	41
6.2	Vergleich mit Experiment . . . . .	42
6.3	Einfluss der Materialparameter . . . . .	43
6.4	Parametervariation am System Kaffeetasse . . . . .	45
6.4.1	Stabilität . . . . .	48

<b>7</b>	<b>Fazit</b>	<b>49</b>
7.1	Ziele und Schwierigkeiten . . . . .	49
7.2	Verbesserungsmöglichkeiten . . . . .	49
7.3	Kritik der Lehrveranstaltung . . . . .	50
<b>A</b>	<b>Verzeichnisse</b>	<b>51</b>
A.1	Größenverzeichnis . . . . .	51

# Tabellenverzeichnis

3.1	Indextafel des Beispiels . . . . .	23
5.1	Materialeigenschaften der Kaffeetasse . . . . .	35

# Abbildungsverzeichnis

3.1	Dreiecksring . . . . .	10
3.2	Dreieckselement in vektorieller Form . . . . .	16
3.3	kleines Zuordnungsbeispiel . . . . .	20
5.1	reale Kaffeetasse und Kaffeetassenmodell im Netzgenerator (Raster: 2cm) . . . . .	34
5.2	trianguliertes Kaffeetassenmodell im Netzgenerator . . . . .	35
5.3	Eigenschaften des Kaffeetassenmodells . . . . .	36
5.4	detaillierte Darstellung der Triangulierung . . . . .	37
5.5	Wärmebild der Kaffeetasse zu Beginn der Simulation . . . . .	38
5.6	Wärmebild der Kaffeetasse nach einer Minute . . . . .	38
5.7	Wärmebild der Kaffeetasse nach zehn Minuten . . . . .	39
5.8	Wärmebild der Kaffeetasse nach einer Stunde . . . . .	39
5.9	Wärmebild der Kaffeetasse nach zwei Stunden . . . . .	40
5.10	Wärmebild der Kaffeetasse nach drei Stunden . . . . .	40
6.1	Gitternetz einer Stabquerschnittshälfte . . . . .	41
6.2	Temperaturverlauf am Knoten 3 . . . . .	42
6.3	Vergleich von Simulation und Experiment . . . . .	42
6.4	Temperaturanstieg über die Zeit bei unterschiedlichen $\lambda$ . . . . .	43
6.5	Temperaturen bei unterschiedlichen $\lambda$ zum Zeitpunkt $t=120s$ . . . . .	43
6.6	Temperaturanstieg über die Zeit bei unterschiedlichen Dichten . . . . .	44
6.7	Temperaturanstieg über die Zeit bei unterschiedlichen Wärmekapazitäten . . . . .	44
6.8	Wärmebild des Kaffeetassenmodells . . . . .	45
6.9	Temperaturverlauf bei verschiedenen Wärmeleitahlen des Tassenmaterialies . . . . .	46
6.10	Temperaturverlauf bei unterschiedlichen Dichten des Tassenmaterialies . . . . .	46
6.11	Temperatur des Wassers bei unterschiedlichen Dichten des Tassenmaterialies . . . . .	47
6.12	Temperatur der Flüssigkeit bei unterschiedlichen Dichten . . . . .	47

# Kapitel 1

## Projektdefinition

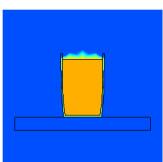
Im Durchschnitt trinkt jeder Deutsche vier Tassen Kaffee am Tag, das entspricht 160 Liter bzw. 6,7 Kilogramm pro Jahr. Damit ist Kaffee noch vor Bier das beliebteste Getränk der Deutschen. Kaffee wird i.A. mit siedendem Wasser aufgebriht und bei einer Temperatur von ca. 50 bis 60°C getrunken. Im Projekt Praktische Mathematik haben wir die Dauer der Abkühlung eines frisch aufgebrihten Kaffees und der Tasse untersucht. Dazu haben wir eine FEM-basierte Simulation programmiert, die das Abkühlverhalten des Kaffees und die Wärmeausbreitung in der Tasse und der Umgebung in Abhängigkeit der Anfangstemperatur des Kaffees, der Umgebungstemperatur, und der Wärmeleitfähigkeit der Materialien berechnet.

Die Vorgehensweise, die mathematische und physikalische Theorie, die Implementierung als C-Programm und die Ergebnisse finden sich in folgendem Bericht. Außerdem kann der aus den Ergebnisdaten erzeugte Film der Abkühlung in Form eines Daumenkinos am unteren Rand dieses Berichtes betrachtet werden.

Der besondere Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Darstellung eines dynamischen, zwar rotationsymmetrischen aber dreidimensionalen Problems. Es ergaben sich dabei spezielle Anforderungen an die Überführung der mathematischen Theorie eines instationären Problems in ein einfaches Modell zur programmtechnischen Lösung unserer Aufgabe.

Als Anwendung könnte damit die Auswirkung verschiedener Kaffeetassenmaterialien oder Geometrien auf die Abkühlgeschwindigkeit untersucht werden. Dabei kann das schnelle Abkühlen wie auch das Warmhalten, z.B. bei einer Thermoskanne, von Interesse sein.

Neben der vielleicht etwas trivialen Anwendung für Kaffeetrinker, könnten mit dem Programm auch andere technische Problemstellungen berechnet werden. Es kann die dynamische Wärmeausbreitung um beliebige doppelsymmetrische, dreidimensionale Körper numerisch ausgeben.



# Kapitel 2

## Physikalische Grundlagen

### 2.1 Herleitung der Wärmeleitungsgleichung

Der Kaffee kühlt ab, indem er seine Wärmeenergie an die Umgebung abgibt. Dies geschieht neben der Wärmeabgabe, durch die hier vernachlässigte Wärmestrahlung, im Wesentlichen durch Wärmeleitung. Dieser Vorgang soll daher Ausgangspunkt der Betrachtung sein.

Die abfließende Wärme kann durch einen Vektor  $\dot{q}$ , die Wärmestromdichte beschrieben werden. Dieser gibt die Richtung des Wärmestroms und dessen Betrag die Menge an transportierter Wärmeenergie, bezogen auf Fläche und Zeit, an. Anschaulich steht dieser Vektor senkrecht auf der Tassenoberfläche und da Wärmeleitung immer in Richtung abnehmender Temperatur stattfindet, zeigt er nach außen. Eine Beziehung zum Temperaturgradienten und zur Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  des Mediums liefert uns das *Fouriersche Gesetz*:

$$\dot{q} = -\lambda \text{grad}T \quad (2.1.1)$$

Dabei gilt im dreidimensionalen Raum:  $\nabla T := (\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z})$ . Des weiteren gilt das Gesetz der Energieerhaltung, welches besagt, dass die gespeicherte Energie gleich der Summe aus transportierter und gewandelter Energie sein muss die Wärmeenergie, die je Zeiteinheit aus einem bestimmten Gebiet herausfließt, muß durch Umwandlung anderer Energieformen erzeugt werden.

Ziel ist es nun, aus dem Energieerhaltungssatz eine Differentialgleichung abzuleiten. Dazu betrachten wir ein kleines Rechteck in der Ebene mit den Kantenlängen  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ . Wir wollen untersuchen wieviel Wärmeenergie je Zeiteinheit aus dem Rechteck herausströmt. Die Wärmestromdichten  $\dot{q}(x, y)$  durch die vier Rechteckseiten nach außen können an den Seitenmittelpunkten berechnet und durch eine Taylorreihe dem wirklichen Wert genähert werden.

Da wir das Rechteck als differentiell klein annehmen, kann  $\dot{q}$  über der jeweiligen Seite als konstant gelten. Der Wärmestrom durch die untere Rechteckseite nach außen beträgt dann:

$$-\dot{q}(x + \frac{\Delta x}{2}, y)\Delta x \approx \left[ -\dot{q}(x, y) - \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} \Delta x \right] \Delta x.$$

Analog erhält man für den Wärmestrom durch die obere Seite:

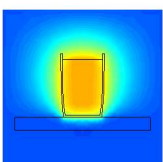
$$\dot{q}(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \Delta y)\Delta x \approx \left[ -\dot{q}(x, y) + \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \dot{q}}{\partial y} \Delta y \right] \Delta x.$$

Genauso für die rechte und die linke Seite:

$$\begin{aligned} \dot{q}(x + \Delta x, y + \frac{\partial y}{2})\Delta y &\approx \left[ -\dot{q}(x, y) + \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \dot{q}}{\partial y} \Delta y \right] \Delta y, \\ -\dot{q}(x, y + \frac{\partial y}{2})\Delta y &\approx - \left[ -\dot{q}(x, y) + \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \dot{q}}{\partial y} \Delta y \right] \Delta y. \end{aligned}$$

Die Summe der Energieströme der 4 Seiten entspricht der gesamten Wärmestromdichte des Rechtecks nach außen und lautet:

$$\dot{Q} = \left[ \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} \right] \Delta x \Delta y.$$



Jetzt teilen wir durch  $\Delta x \Delta y$ , was gerade der Fläche des Rechtecks entspricht und erhalten:

$$\frac{\dot{Q}}{\Delta x \Delta y} = \left[ \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} \right] = \operatorname{div} \dot{q}.$$

Je kleiner die Seiten des Rechtecks werden, desto genauer wird die Näherung und da wir uns auf die Größe der Fläche beziehen, spielt auch die Geometrie der Fläche keine Rolle. Für den Grenzwert verschwindender Fläche, ist das Verhältnis Wärmestrom nach außen je Fläche stets durch den selben Ausdruck gegeben. Man kann den Wärmestrom auch auf Volumina, z.B. einen Quader beziehen. Die Divergenz des Wärmestromes lautet dann:

$$\operatorname{div} \dot{q}(x, y, z) := \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{q}}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Auch hier ist die Näherung desto genauer, je kleiner das Volumen ist.  $\frac{\partial w}{\partial t}$  ist dabei die zeitliche Änderung der Wärmeenergiedichte, die nach dem Energierhaltungssatz durch Wärmetransport nach außen abnimmt. Wir erhalten damit einen Erhaltungssatz in Form einer sog. Kontinuitätsgleichung:

$$\operatorname{div} \dot{q} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Da im Inneren zusätzliche Energie durch Umwandlung anderer Energieformen entstehen kann, muss die Differentialgleichung auf der rechten Seite durch  $\dot{q}_E$ , die spezifische Ergiebigkeit der Wärmequelle, ergänzt werden. Diese gibt an, wieviel Wärmeenergie pro Volumen- und Zeiteinheit an welchem Ort entsteht.

$$\operatorname{div} \dot{q} + \frac{\partial w}{\partial t} = \dot{q}_E \quad (2.1.2)$$

Zwischen der Temperatur und der Wärmeenergie lässt sich nun noch folgender Zusammenhang herstellen:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = c \cdot \rho \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2.1.3)$$

$c$  ist dabei die spezifische Wärme je Masseneinheit und  $\rho$  die Materialdichte, die hier als temperaturunabhängig angenommen werden kann. Jetzt können wir das FOURIERSche Gesetz (2.1.1) und die Gleichung (2.1.3) in die Gleichung (2.1.2) einsetzen und erhalten damit die dreidimensionale Wärmeleitungsdifferentialgleichung:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}_E. \quad (2.1.4)$$

Oder in symbolischer Schreibweise:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot [\lambda \cdot \nabla T] + \dot{q}_E.$$

Für unsere Bedürfnisse, können nun noch folgende Vereinfachungen getroffen werden.

Da unsere Tasse rotationssymmetrisch ist, können wir die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitungsgleichung auf zwei Ortskoordinaten beschränken, d.h.:

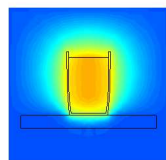
$$T(\underline{x}, t) = T(x, y, t).$$

Was für das Wasser, bzw. den Kaffee und die Luft hinsichtlich der Isotropie gilt, soll auch für die anderen Werkstoffe gelten. Es gilt also wegen  $\bar{\lambda} \rightarrow \lambda$  :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot [\lambda \nabla T] + \dot{q}_E$$

Außerdem soll jedes Material, bezüglich der Wärmeleitfähigkeit, homogen und temperaturunabhängig sein: ( $\lambda \neq \lambda(x)$ ,  $\lambda \neq \lambda(T)$ ). Damit kann  $\lambda$  vorgezogen werden und unter Verwendung des LAPLACE-Operators ergibt sich, mit den getroffenen Annahmen, aus Gleichung (2.1.4) folgende kompakte Form:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + \dot{q}_E. \quad (2.1.5)$$



## 2.2 Randbedingungen

Besonders interessant und wichtig sind die Wärmeleitvorgänge an den Rändern. Solche Ränder sind zum Beispiel die Symmetrielinie und die äußere Grenze unseres Systems Kaffeetasse und Umgebung. Wir unterscheiden zwischen drei verschiedenen Übergangsbedingungen.

- DIRICHLET-Randbedingung (1. Art)

Bei der DIRICHLET-Randbedingung ist die Temperatur am Rand des Gebietes fest vorgegeben. Dies ist z.B. bei einer an die Umgebung angrenzenden Flüssigkeit bei bekannter Umgebungstemperatur gegeben.

$$T(x, t) = T_R(x, t) \quad (2.2.1)$$

Dabei kann  $T_R$  eine vorgegebene Funktion oder eine Konstante annehmen. Die Bezeichnung *geometrische* oder *kinematische* Randbedingung ist ebenfalls üblich.

- NEUMANN-Randbedingung (2. Art)

Ist ein konstanter Wärmestrom  $\dot{q}_N$  über den Rand, senkrecht zur Oberfläche vorgegeben, so lässt sich die NEUMANN-Bedingung verwenden. Sie wird beschrieben durch:

$$\vec{n}^T \cdot \dot{q} = -\lambda \vec{n}^T \cdot \nabla u = \dot{q}_N. \quad (2.2.2)$$

Liegt eine ideale Isolierung vor spricht man von der homogenen NEUMANN-Randbedingung, bei der  $\dot{q}_N = 0$  ist:

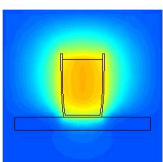
$$\vec{n}^T \cdot \dot{q} = -\lambda \vec{n}^T \cdot \nabla u = 0. \quad (2.2.3)$$

- Cauchy Randbedingung (3. Art)

Eine weitere, sehr realitätsnahe Randbedingung besteht darin, anzunehmen, daß der Wärmestrom senkrecht zum Rand proportional zur Differenz der Innentemperatur  $u_i$  und der Außentemperatur  $u_a$  ist:

$$\vec{n}^T \cdot \dot{q} = -\lambda \vec{n}^T \cdot \nabla u = \alpha(u_i - u_a). \quad (2.2.4)$$

Der Übergangskoeffizient  $\alpha$  ist schwierig zu bestimmen und für wichtige Materialien in Handbüchern tabelliert.



# Kapitel 3

## Mathematische Modellbildung

### 3.1 Lösungsansatz für die Wärmeleitungsdifferentialgleichung

Die nun gesuchte Lösung der Wärmeleitungsgleichung muß die Differentialgleichung an jeder Stelle des betrachteten Gebietes erfüllen und auf dem Rand des Gebietes die geforderten Randwerte annehmen vgl. Abs. 2.2. Dies wird hier jedoch nur in Form einer Näherungslösung möglich sein, da es nur selten gelingt eine analytische Lösung für die Wärmeleitungsgleichung zu finden.

Ein gängiger Weg die Wärmeleitungsgleichung mit der finiten Elementmethode zu lösen, führt über das Extremal- oder Variationsprinzip. Hierfür muss ein Funktional existieren, das für die gesuchte Lösung einen extremalen oder stationären Wert annimmt.

Wir wollen das Abkühlverhalten des Kaffees in Abhängigkeit von der Zeit untersuchen, haben also ein instationäres Problem. Bei der instationären Wärmeleitungsgleichung existiert jedoch kein solches Funktional. Daher werden wir zur näherungsweise Lösung nicht von einem Funktional, sondern von einer sog. ‘schwachen Formulierung’ der Differentialgleichung und den Randbedingungen ausgehen. Zusätzlich treten bei einem zeitabhängigem Problem Anfangsbedingungen auf. Eine Funktion  $u$ , die die schwache Formulierung befriedigt heißt ‘schwache Lösung’.

### 3.2 Schwache Formulierung

Um die schwache Formulierung zu erhalten gehen wir wie folgt vor: Wir multiplizieren die Differentialgleichung mit einer Testfunktion und integrieren das Ergebnis über das Grundgebiet:

$$\int_{\Omega} (WDGL \cdot Testfunktion) d\Omega = 0.$$

Wir gehen dazu zunächst wieder von der vereinfachten Wärmeleitungsgleichung (2.1.5) aus:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + \dot{q}_E,$$

mit den in Abs. 2.2 genannten Randbedingungen. Diese wird mit der dimensionslosen Testfunktion  $\psi(x)$  multipliziert, welche nur vom Ort und nicht von der Zeit abhängt. Die Testfunktion muss dabei folgenden Eigenschaften genügen:

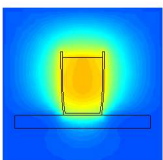
- die Testfunktion muss auf dem DIRICHLET-Rand  $C_D$  in unserem Modell verschwinden:  $\psi(x) = 0$ ,  $x \in C_D$ , auf dem CAUCHY- und dem NEUMANN-Rand darf sie beliebig sein;
- die Testfunktion muss innerhalb des betrachteten Gebietes stückweise stetig, d.h. differenzierbar sein.

Wir erhalten also:

$$\left( \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T - \dot{q}_E \right) \psi = 0.$$

Nun folgt die Integration über die gesamte Fläche:

$$\int_A \left( \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T - \dot{q}_E \right) \psi dA = 0.$$



Durch umstellen der Einzelintegrale entsteht:

$$\int_A \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \psi \, dA - \int_A \psi \lambda \Delta T \, dA - \int_A \dot{q}_E \psi \, dA = 0. \quad (3.2.1)$$

Um das 2. Integral auf der linken Seite umzuformen, brauchen wir die 1. GREENSche Formel. Sie lautet in allgemeiner Form:

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dV = \int_{\partial\Omega} u \langle \nabla v, \underline{n} \rangle \, dc - \int_{\Omega} u \Delta v \, dV \quad (3.2.2)$$

Sie gilt auf einem beschränkten Gebiet  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  mit der Oberfläche  $\partial\Omega$  mit der äußeren Normalen  $\underline{n}$ . Dabei ist  $\underline{n}$  überall von Null verschieden und  $u$  und  $v$  reellwertige Funktionen auf einer offenen,  $\Omega$  umfassenden Menge. Um den Satz anwenden zu können, stellen wir um:

$$\int_{\Omega} u \Delta v \, dV = \int_{\partial\Omega} u \langle \nabla v, \underline{n} \rangle \, dc - \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dV. \quad (3.2.3)$$

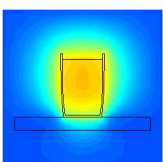
Dies wenden wir nun mit  $u = \psi$ ,  $v = \lambda T$  auf unser Flächenintegral (3.2.1) an und erhalten:

$$\int_A \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \psi \, dA - \left[ \int_{\partial A} \psi \underline{n} \cdot (\lambda \nabla T) \, dC - \int_A \nabla \psi \cdot \lambda \nabla T \, dA \right] - \int_A \dot{q}_E \psi \, dA = 0. \quad (3.2.4)$$

Dabei haben wir  $dA = dV$  und  $dc = dC$  gesetzt. Jetzt bringen wir das 2. und das letzte Integral von der rechten auf die linke Seite und erhalten:

$$\int_A \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \psi \, dA + \int_A \nabla \psi \cdot \lambda \nabla T \, dA = \int_A \dot{q}_E \psi \, dA + \int_{\partial A} \psi \underline{n} \cdot (\lambda \nabla T) \, dC \quad (3.2.5)$$

Der letzte Term beschreibt dabei das Temperaturverhalten am Rand. Bevor nun ein Ansatz für  $T(\underline{x}, t)$  eingesetzt werden kann, müssen noch die bereits im vorigem Abschnitt 2.2 besprochenen Randbedingungen eingearbeitet werden.



### 3.3 Modellierung der Randbedingungen

Der Rand in Gl. (3.2.5) wird nun in Teiltränder eingeteilt, auf denen DIRICHLETSche, NEUMANNsche und CAUCHYSche Randbedingungen vorgegeben sind. Für das Randintegral folgt dann also:

$$\int_{\partial A} \psi \underline{n} \cdot (\lambda \nabla T) \, dC = \int_{\partial C_D} \underbrace{\psi \underline{n} \cdot (\lambda \nabla T)}_{=0} \, dC + \int_{\partial C_N} \psi \underline{n} \cdot (\lambda \nabla T) \, dC + \int_{\partial C_C} \psi \underline{n} \cdot (\lambda \nabla T) \, dC.$$

Da die Testfunktion  $\psi$  auf dem DIRICHLET-Rand verschwinden soll, ist dieser Term gleich Null. In die restlichen Randintegrale werden nun die Randbedingungen (2.2.2)  $\underline{n} \cdot \underline{\dot{q}} = \dot{q}_R$ ,  $\underline{x} \in C_N$  und (2.2.4)  $\underline{n} \cdot \underline{\dot{q}} = \alpha(T - T_{Fluid(t)})$ ,  $\underline{x} \in C_C$  eingearbeitet. Das führt insgesamt auf:

$$\begin{aligned} \int_A \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \psi \, dA + \int_A \lambda \nabla \psi \cdot \nabla T \, dA = \\ \int_A \dot{q}_E \psi \, dA + \int_{C_N} \psi (-\dot{q}_R) \, dC - \int_{C_C} \psi \alpha (T - T_{Fluid}) \, dC. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Dies ist die sogenannte schwache Formulierung der ebenen Wärmeleitungsgleichung. Eine Funktion  $T(\underline{x}, t)$ , also eine sog. schwache Lösung muss folgenden Kriterien genügen.

- Sie muss einmal im Ort und einmal in der Zeit differenzierbar sein.
- Sie muss für jede erlaubte Testfunktion  $\psi$  und zu allen Zeiten  $t$  die schwache Formulierung erfüllen.
- Sie muss auf dem DIRICHLET-Rand der DIRICHLET-Randbedingung genügen.

Für die weitere Berechnung benötigen wir die schwache Formulierung noch in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \int_A \rho c \psi \frac{\partial T}{\partial t} \, dA + \int_A \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \frac{\partial T}{\partial x_\mu} \, dA + \int_{C_C} \psi \alpha T \, dC = \\ \int_A \dot{q}_E \psi \, dA + \int_{C_N} \psi (-\dot{q}_R) \, dC + \int_{C_C} \psi \alpha (T - T_{Fluid}) \, dC \quad , \mu = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Mit Hilfe der schwachen Formulierung kann nun, ohne dass eine klassische Lösung bekannt ist oder gar existiert, eine physikalisch sinnvolle Lösung für die Temperatur des Kaffees numerisch berechnet werden.

### 3.4 Methode der finiten Elemente

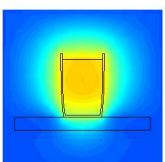
Um einen Ansatz für die Temperatur  $T(\underline{x}, t)$  in (3.3.2) zu finden wird unser Gebiet, in folgendem  $A$  genannt, in lineare Elemente unterteilt. In unserem Fall sind das Dreiecke. Die Eckpunkte der Dreiecke werden Knoten genannt und entgegen dem Uhrzeigersinn durchnummeriert.

Im einfachsten Fall bestünde unser Gebiet nur aus einem Dreieck und unser Gebiet müsste in diesem Fall ebenfalls dreieckig sein. Als Ansatz für die Beschreibung des Temperaturverlaufs bei diesem Dreieck bietet sich im einfachsten Fall ein linearer Polynomansatz an:

$$\tilde{T}(x, y, t) = a_1(t) + a_2(t)x + a_3(t)y. \quad (3.4.1)$$

In diesem Ansatz für die Temperatur wird also nach dem Ort und der Zeit separiert und der Funktionsverlauf der Temperatur entspricht einer Ebenengleichung. Die wirkliche Temperatur wird dabei natürlich immer unbekannt bleiben, da es sich dabei um keine analytische sondern eben um eine Näherungslösung handelt.

Der Temperaturverlauf im gesamten Gebiet wird nun nur noch durch die Parameter  $a_k$  bestimmt. In der wahren Lösung dürfte jeder Punkt des Gebietes eine andere Temperatur besitzen und die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems wäre somit unendlich. In unserer Näherungslösung wird die Temperatur nur durch die drei Funktionswerte in den Ecken des Dreiecks bestimmt und die



Anzahl der Freiheitsgrade entspricht gerade der Anzahl der Parameter  $a_k$ . Das o.g. System mit nur einem Dreieck hätte demnach genau drei Freiheitsgrade. Die Funktionswerte der Temperatur in den Ecken werden entsprechend den Knotennummern durchnummeriert und wir können den Ansatz folgendermaßen formulieren:

$$\tilde{T}(t, x) = \sum_{k=1}^{N=3} u_k(t) f_k^*(x) = u_1(t) f_1^*(x) + u_2(t) f_2^*(x) + u_3(t) f_3^*(x) \quad , x \in A. \quad (3.4.2)$$

Die  $u_k$  entsprechen dabei den Knotentemperaturen. Bei den Parametern  $f^*$  handelt es sich um die sogenannten Formfunktionen. Werden diese in einem Vektor zusammengefasst:

$$\underline{f}^*(x) = \begin{pmatrix} f_1^*(x) \\ f_2^*(x) \\ f_3^*(x) \end{pmatrix}, x \in A,$$

können wir den Ansatz auch folgendermaßen formulieren:

$$\tilde{T}(t, x) = \underline{f}^*(x)^T \underline{u}(t), x \in A. \quad (3.4.3)$$

Die Knotentemperaturen werden ab jetzt mit  $u_k$  bezeichnet. Bevor der Ansatz für die Temperatur in die schwache Formulierung (3.3.2) eingesetzt werden kann, muss noch die Testfunktion  $\psi$  angepasst werden.

Da unser Ansatz (3.4.3) drei unbekannte Koeffizienten  $u_k$  enthält, sind auch drei linear unabhängige Testfunktionen zur Bestimmung dieser Koeffizienten notwendig. Für die ortsunabhängige Testfunktion bietet sich daher eine Linearkombination der drei Formfunktionen  $f_i^*$  an:

$$\psi(x) = \sum_{l=1}^{N=3} v_l f_l^*(x) = v_1 f_1^* + v_2 f_2^* + v_3 f_3^*. \quad (3.4.4)$$

Da die Formfunktionen  $f_i^*$  auf dem DIRICHLET-Rand nicht verschwinden aber die Testfunktion dort wie gefordert verschwinden soll, werden die Parameter  $v_l$  dort einfach als Null definiert. Im Inneren des Gebietes und auf dem NEUMANN- oder CAUCHY-Rand sind die Koeffizienten  $v_l$  völlig beliebig.

Diese Koeffizienten können nun ebenfalls in einem Vektor zusammengefasst werden:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

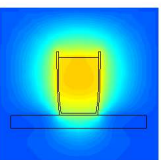
und die Schar der Testfunktionen kann folgendermaßen formuliert werden:

$$\psi(x) = \underline{f}^*(x)^T \underline{v} = \underline{v}^T \underline{f}^*(x). \quad (3.4.5)$$

Jetzt können wir schließlich den Ansatz (3.4.3) für  $T(x, t)$  und die Testfunktion (3.4.5) in die schwache Formulierung (3.3.2) einsetzen:

$$\begin{aligned} \int_A \rho c \underbrace{[\underline{v}^T \underline{f}^*(x)]}_{\psi(x)} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{[\underline{f}^*(x)^T \underline{u}(t)]}_{\tilde{T}(x,t)} dA + \int_A \lambda \frac{\partial}{\partial x_\mu} \underbrace{[\underline{v}^T \underline{f}^*(x)]}_{\psi(x)} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \underbrace{[\underline{f}^*(x)^T \underline{u}(t)]}_{\tilde{T}(x,t)} dA + \\ \int_{C_C} \alpha \underbrace{[\underline{v}^T \underline{f}^*(x)]}_{\psi(x)} \underbrace{[\underline{f}^*(x)^T \underline{u}(t)]}_{\tilde{T}(x,t)} dC = \int_A \rho c \underbrace{[\underline{v}^T \underline{f}^*(x)]}_{\psi(x)} \dot{q}_E dA + \\ \int_{C_N} \underbrace{[\underline{v}^T \underline{f}^*(x)]}_{\psi(x)} (-\dot{q}_R) dC + \int_{C_C} \underbrace{[\underline{v}^T \underline{f}^*(x)]}_{\psi(x)} -\alpha T_{Fluid} dC \quad , \mu = 1, 2 \quad (3.4.6) \end{aligned}$$

Die Vektoren  $\underline{v}^T$  können vor die Integrale gezogen werden, da sie konstant sind. Die Knotentemperaturen  $\underline{u}(t)$  und deren Ableitungen  $\dot{\underline{u}}(t)$  sind nur von der Zeit abhängig und können daher aus



den Ortsintegralen herausgezogen werden:

$$\begin{aligned} \underline{v}^T \int_A \rho c \underline{f}^*(x) \underline{f}^*(x)^T dA \dot{\underline{u}}(t) + \underline{v}^T \int_A \lambda \frac{\partial \underline{f}^*(x)}{\partial x_\mu} \frac{\partial \underline{f}^*(x)^T}{\partial x_\mu} dA \dot{\underline{u}}(t) + \underline{v}^T \int_{C_C} \alpha \underline{f}^*(x) \underline{f}^*(x)^T dC \dot{\underline{u}}(t) = \\ \underline{v}^T \int_A \underline{f}^*(x) \dot{q}_E dA + \underline{v}^T \int_{C_N} \underline{f}^*(x) (-\dot{q}_R) dC + \underline{v}^T \int_{C_C} \underline{f}^*(x) - \alpha T_{Fluid} dC \quad , \mu = 1, 2 \quad (3.4.7) \end{aligned}$$

Durch Ausklammern von  $\underline{v}^T$  und  $\underline{u}(t)$  entsteht dann:

$$\begin{aligned} \underline{v}^T \underbrace{\int_A \rho c \underline{f}^*(x) \underline{f}^*(x)^T dA}_{\mathbf{M}} \dot{\underline{u}}(t) + \underline{v}^T \left[ \underbrace{\int_A \lambda \frac{\partial \underline{f}^*(x)}{\partial x_\mu} \frac{\partial \underline{f}^*(x)^T}{\partial x_\mu} dA}_{\mathbf{S}} + \underbrace{\int_{C_C} \alpha \underline{f}^*(x) \underline{f}^*(x)^T dC}_{\mathbf{S}_C} \right] \underline{u}(t) = \\ \underline{v}^T \underbrace{\left[ \int_A \underline{f}^*(x) \dot{q}_E dA + \int_{C_N} \underline{f}^*(x) (-\dot{q}_R) dC + \int_{C_C} \underline{f}^*(x) - \alpha T_{Fluid} dC \right]}_{\underline{p}(t)} \quad , \mu = 1, 2 \quad (3.4.8) \end{aligned}$$

Den mit den Buchstaben  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{S}_C$  und  $\underline{p}(t)$  bezeichneten Integralen kommen dabei die folgenden Bedeutungen zu:

- Die Massenmatrix:

$$\mathbf{M} = \int_A \rho c \underline{f}^*(x) \underline{f}^*(x)^T dA \quad (3.4.9)$$

mit der Einheit  $\left[\frac{Ws}{Km}\right]$ , die bei thermodynamischen Problemen auch Wärmekapazitätsmatrix genannt wird.

- Die Steifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{S} = \int_A \lambda \frac{\partial \underline{f}^*(x)}{\partial x_\mu} \frac{\partial \underline{f}^*(x)^T}{\partial x_\mu} dA \quad , \mu = 1, 2 \quad (3.4.10)$$

mit der Einheit  $\left[\frac{W}{Km}\right]$ , die auch Wärmeleitfähigkeitsmatrix genannt wird.

- Der Eteifigkeitsanteil, der aus der CAUCHY-Randbedingung resultiert:

$$\mathbf{S}_C = \int_{C_C} \alpha \underline{f}^*(x) \underline{f}^*(x)^T dC \quad (3.4.11)$$

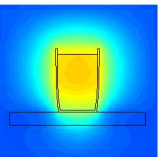
Dieser Anteil tritt nur auf, wenn CAUCHY-Randbedingungen auftreten. Da in unserer Kaffeetasse keine solchen Randbedingungen auftreten entfällt dieser Term.

- Der Lastvektor:

$$\underline{p} = \int_A \dot{q}_E \underline{f}^*(\underline{x}) dA + \int_{C_N} (-\dot{q}_R) \underline{f}^*(\underline{x}) dC + \int_{C_C} \alpha T_{Fluid}(t) \underline{f}^*(\underline{x}) dC \quad (3.4.12)$$

mit der Einheit  $\left[\frac{W}{m}\right]$ . In unserem Modell treten keine CAUCHY- sondern nur DIRICHLET- und homogene NEUMANN-Randbedingungen auf, somit entfällt der letzte Term vollständig, da kein CAUCHY-Rand existiert. Der mittlere Term verschwindet ebenso, da der Wärmestrom über den Rand bei homogenen Randbedingungen gleich Null ist. Es ergibt sich:

$$\underline{p} = \int_A \dot{q}_E \underline{f}^*(\underline{x}) dA \quad (3.4.13)$$



### 3.4.1 Transformation auf Zylinderkoordinaten

Die Kaffeetasse ist im Allgemeinen dreidimensional. Die Matrizen bzw. der Vektor sind bisher nur für die Ebene hergeleitet, nun erfolgt eine Angleichung an das vorliegende rotationsymmetrische dreidimensionale Problem. Dabei bildet sich das Dreieck zu einem Dreiecksring aus, der rotationsymmetrisch zur Ordinate liegt mit dem Querschnitt des ursprünglichen Dreiecks.

Anhand eines exemplarischen Integrals soll die Erweiterung verdeutlicht werden. Es wird von einer

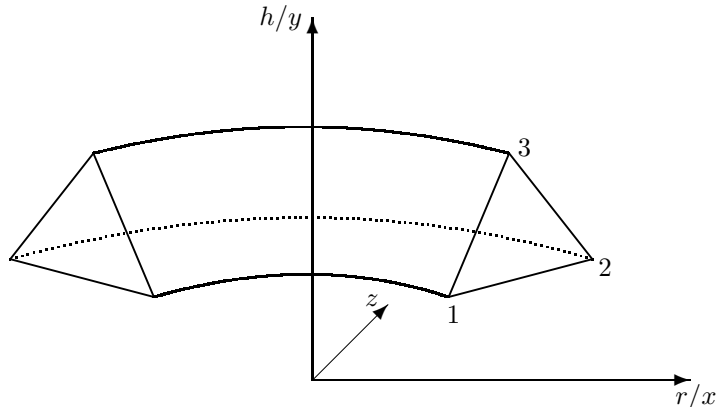


Abbildung 3.1: Dreiecksring

Konstanten, die es zu integrieren gilt, ausgegangen.

$$k = \iint_{\Delta} K \, dA \quad (3.4.14)$$

Zuerst wird das Flächenintegral in kartesische Koordinaten umgeschrieben und gleich auf den Raum erweitert. Ein allgemeines Integral einer Konstante sieht wie folgt aus:

$$k = \iiint_{\Delta\text{-Ring}} K \, dx \, dy \, dz \quad (3.4.15)$$

Für die zylindrische Tasse und den angenommenen zylindrischen Umgebungsraum bietet sich eine Integraltransformation auf Zylinderkoordinaten an. Der Ring kann gleich in Dreiecksfläche und Rotationparameter zerlegt werden.

$$k = \int_0^{2\pi} \iint_A K \, r \, dr \, dh \, d\varphi \quad (3.4.16)$$

Es wird hier ausschließlich von vollständigen Tassen ausgegangen, so dass der Umfang  $360^\circ$  oder  $2\pi$  beträgt. Die Integration nach  $\varphi$  kann so gleich aufgelöst werden.

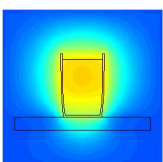
$$k = 2\pi \iint_A K \, r \, dr \, dh \quad (3.4.17)$$

Stellt man sich jetzt den Dreiecksring um die  $h$ -achse vor, wie in Abb. 3.1, so ist die von der  $r$ - und  $h$ -achse aufgespannte Ebene wieder die  $(x, y)$ -Ebene und der Schnitt durch den Ring die ursprüngliche Dreiecksfläche. Damit können die alten Bezeichner wiederverwendet werden.

$$\iint_{\Delta} r \, dr \, dh = \iint_{\Delta} x \, dx \, dy$$

Das vollständig transformierte Integral lautet:

$$k = 2\pi \iint_A K \, x \, dx \, dy \quad (3.4.18)$$



Wenn  $K$  durch die jeweiligen Integranden ersetzt wird, ergeben sich die auf den rotationsymmetrischen, dreidimensionalen Fall angepassten Integrale.

- Die Elementmassenmatrix:

$$\mathbf{m} = 2\pi \iint_A \rho c \underline{f}^*(\underline{x}) \underline{f}^{*T}(\underline{x}) x \, dx \, dy \quad (3.4.19)$$

in  $\left[\frac{\text{J}}{\text{K}}\right]$

- Die Elementsteifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{s} = 2\pi \iint_A \lambda \frac{\partial \underline{f}^*(\underline{x})}{\partial x_\mu} \frac{\partial \underline{f}^{*T}(\underline{x})}{\partial x_\mu} x \, dx \, dy, \quad \mu = 1, 2 \quad (3.4.20)$$

in  $\left[\frac{\text{W}}{\text{K}}\right]$

- Der Elementlastvektor:

$$\underline{p} = 2\pi \iint_A \dot{q}_E \underline{f}^*(\underline{x}) x \, dx \, dy \quad (3.4.21)$$

in [W]

### 3.4.2 Die schwache Formulierung in Zylinderkoordinaten

In den oben aufgeführten Ausdrücken treten nun nur noch bekannte Größen auf. Die Wärmekapazität und die Wärmeleitfähigkeit für die in unserem System auftretenden Materialien, z.B. Wasser oder Keramik, haben wir dem VDI-Wärmeatlas entnommen. Der Wärmequellstrom  $\dot{q}_E$  wird durch die Vorgabe der Anfangstemperatur festgelegt. Mit diesen Abkürzungen können wir Gleichung (3.4.8) kurz schreiben als:

$$\underline{v}^T \mathbf{M} \dot{\underline{u}}(t) + \underline{v}^T \mathbf{S} \underline{u}(t) = \underline{v}^T \underline{p}(t). \quad (3.4.22)$$

Diese Terme können wir nun näherungsweise in unserer schwachen Formulierung (3.3.2) identifizieren:

$$\underline{v}^T \mathbf{M} \dot{\underline{u}}(t) \approx 2\pi \int_A \rho c \psi \frac{\partial T}{\partial t} \, dA \quad (3.4.23)$$

$$\underline{v}^T \mathbf{S} \underline{u}(t) \approx 2\pi \int_A \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \frac{\partial T}{\partial x_\mu} \, dA, \quad \mu = 1, 2 \quad (3.4.24)$$

$$\underline{v}^T \underline{p}(t) = 2\pi \int_A \dot{q}_E \psi \, dA \quad (3.4.25)$$

Worauf wir hinaus wollen ist eine einfache Differentialgleichung, die wir numerisch lösen können. Dazu ziehen wir in Gl. (3.4.22) die in  $\underline{v}$  zusammengefassten Testfunktionen vor das Integral:

$$\underline{v}^T (\mathbf{M} \dot{\underline{u}}(t) + \mathbf{S} \underline{u}(t) - \underline{p}(t)) = 0. \quad (3.4.26)$$

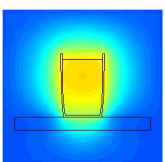
Da die Testfunktionen zwar auf dem DIRICHLET-Rand Null gesetzt werden, der Rand aber bei der Betrachtung für das Gebiet vorerst ausgeklammert werden kann, können wir  $\underline{v}^T$  vor das Integral ziehen:

$$\mathbf{M} \dot{\underline{u}}(t) + \mathbf{S} \underline{u}(t) - \underline{p}(t) = 0. \quad (3.4.27)$$

Dies führt auf ein gewöhnliches Zeitdifferentialgleichungssystem für die Knotentemperaturen  $u_k(t)$ :

$$\mathbf{M} \dot{\underline{u}} + \mathbf{S} \underline{u} = \underline{p} \quad (3.4.28)$$

welches wir numerisch lösen können.



## 3.5 Berechnung der Elementmatrizen

In Hinblick auf das Gesamtsystem, bei dem die Elementmatrizen vieler unterschiedlicher Elemente berechnet werden müssen, ist es vorteilhaft diese auf ein Einheitsdreieck oder Referenzdreieck abzubilden. So hat man eine allgemeine Rechenvorschrift, die das Bestimmen erleichtert. Eine Transformation, die dies leistet, wird gesucht. Anschließend werden mit dieser Transformation die Elementmatrizen  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{s}$  und der Vektor  $\underline{p}$  ermittelt. Aus diesen wiederum kann das Gleichungssystem für das gesamte Gebiet der Kaffeetasse aufgestellt werden.

### 3.5.1 Transformation auf das Einheitsdreieck

Das Dreieck  $A$  im  $(x, y)$ -System, welches eine beliebige Form haben kann, wird auf das Einheitsdreieck  $A_0$  im  $(\xi, \eta)$ -System transformiert, dessen Knoten in den Punkten  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  und  $(1, 0)$  liegen. Die folgende Transformation bildet das Dreieck  $A$  auf das gewünschte Einheitsdreieck  $A_0$  ab.

$$x(\xi, \eta) = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta \quad (3.5.1)$$

$$y(\xi, \eta) = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta \quad (3.5.2)$$

In Matrixschreibweise sieht das dann wie folgt aus:

$$\underline{x}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} (x_2 - x_1) & (x_3 - x_1) \\ (y_2 - y_1) & (y_3 - y_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \quad (3.5.3)$$

Somit sind die Formfunktionen  $f^*(x, y)$  jetzt Funktionen von  $(\xi, \eta)$ , also  $f(\xi, \eta)$  und damit auf das Einheitsdreieck normiert. Ebenso gilt dies für die Berechnungsvorschriften der Elementmatrizen und des Elementlastvektors. Die Spezifizierung der Formfunktionen erfolgt im nächsten Abschnitt. Um die Integraltransformation zu vervollständigen, muss noch die Determinante der JACOBI-Matrix  $\mathbf{J}$  mit berücksichtigt werden. Diese berechnet sich aus

$$\mathbf{J} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (x_3 - x_1) \\ (y_2 - y_1) & (y_3 - y_1) \end{vmatrix}.$$

Damit ergibt sich der Wert von  $\mathbf{J}$  zu

$$\mathbf{J} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1). \quad (3.5.4)$$

Dieser ist immer positiv, wenn die Knoten im mathematisch positiven Drehsinn durchnummeriert sind.

Die transformierten Berechnungsvorschriften der Elementmatrizen und des Elementlastvektors lauten wie folgt.

- Elementmassenmatrix:

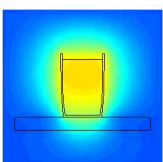
$$\mathbf{m} = 2\pi \iint_{A_0} \rho c \underline{f}(\xi, \eta) \underline{f}^T(\xi, \eta) \mathbf{J} \underline{x}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.5.5)$$

- Elementsteifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{s} = 2\pi \iint_{A_0} \lambda \left( \frac{\partial \underline{f}}{\partial x} \frac{\partial \underline{f}^T}{\partial x}(\xi, \eta) + \frac{\partial \underline{f}}{\partial y} \frac{\partial \underline{f}^T}{\partial y}(\xi, \eta) \right) \mathbf{J} \underline{x}(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad \mu = 1, 2 \quad (3.5.6)$$

- Elementlastvektor

$$\underline{p} = 2\pi \iint_{A_0} q_E \underline{f}(\xi, \eta) \mathbf{J} \underline{x}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.5.7)$$



### 3.5.2 Bestimmung der Formfunktionen am Einheitsdreieck

Der in Abschnitt 3.4 gemachte polynomiale Ansatz, Gl. (3.4.1) wird hier noch einmal aufgegriffen, allerdings auf das Einheitsdreieck und die damit verbundenen Koordinaten  $(\xi, \eta)$  angewandt. So lautet der Ansatz für T:

$$\tilde{T}(t, \xi, \eta) = a_1(t) + a_2(t)\xi + a_3(t)\eta = \underline{\varrho}^T(\xi, \eta)\underline{a}(t) . \quad (3.5.8)$$

Die Knotenkoordinaten sind jetzt

$$(\xi_1, \eta_1) = (0, 0), (\xi_2, \eta_2) = (1, 0), (\xi_3, \eta_3) = (0, 1)$$

und für alle Dreiecke gleich. Daraus ergibt sich für die Knotentemperaturen in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{pmatrix} \quad (3.5.9)$$

Durch umstellen können die Ansatzkoeffizienten  $a_i(t)$  durch die Knotentemperaturen  $u_i(t)$  ausgedrückt werden.

$$\begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} \quad (3.5.10)$$

Nun kann dies wieder in den Temperaturansatz (3.5.8) eingesetzt werden und so ergibt sich:

$$\tilde{T}(t, \xi, \eta) = \underbrace{\underline{\varrho}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{f}^T} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} \quad (3.5.11)$$

Nach einem Blick auf Gl. (3.4.3) können die Formfunktionen identifiziert und aufgestellt werden. Die normierten Formfunktionen lauten

$$\begin{aligned} \underline{f}^T &= \underline{\varrho}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (1, \xi, \eta) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (1 - \xi - \eta, \xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

bzw. als Spaltenvektor

$$\underline{f}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} 1 - \xi - \eta \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad \text{mit } (\xi, \eta) \in A_0 . \quad (3.5.13)$$

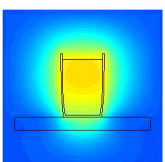
Komponentenweise sieht der Formfunktionsvektor wie folgt aus:

$$f_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \quad (3.5.14)$$

$$f_2(\xi, \eta) = \xi \quad (3.5.15)$$

$$f_3(\xi, \eta) = \eta \quad (3.5.16)$$

dabei handelt es sich um Ebenengleichungen, so dass der jeweilig betrachtete Knoten den Wert eins besitzt und die anderen beiden null. Mit diesem Ergebnis lassen sich jetzt die Elementmatrizen und der Lastvektor als explizite Formel darstellen und es sind lediglich die Materialparameter für jedes einzelne Element anzugleichen.



### 3.5.3 Berechnung der Elementmassenmatrix

Die Massenmatrix berechnet sich laut Herleitung, siehe (3.5.5), zu

$$\mathbf{m} = 2\pi \iint_{A_0} \rho c \underline{f}(\xi, \eta) \underline{f}^T(\xi, \eta) \mathbf{J} x(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.5.5)$$

mit den Formfunktionen aus Abschnitt 3.5.2 und der Koordinatentransformation (3.5.1) ergibt sich die Elementmassenmatrix zu

$$\mathbf{m} = 2\pi \iint_{A_0} \rho c \begin{pmatrix} 1 - \xi - \eta \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \xi - \eta & \xi & \eta \end{pmatrix} \mathbf{J} \cdots \cdots (x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta) d\xi d\eta. \quad (3.5.17)$$

Da die Wärmekapazität und die Dichte als ortsunabhängig über einem Element angenommen werden, können diese genau wie die Funktionaldeterminante, die ebenso ortsunabhängig ist, vor das Integral gezogen werden. Nach der Bildung des dyadischen Produktes kann die Matrix elementweise integriert werden und ergibt:

$$\mathbf{m} = \pi \rho c \frac{\mathbf{J}}{10} \begin{pmatrix} x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 & \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3 & \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3 & \frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 & \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{3}x_3 & \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 & \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3 \end{pmatrix} \quad (3.5.18)$$

Die Massenmatrix ist stets positiv, da sich der Vorfaktor aus positiven Teilen zusammensetzt und die Werte der Matrix nicht negativ werden können. Die Dichte  $\rho$  und die Wärmekapazität können auf Grund ihrer physikalischen Eigenschaften nicht negativ werden. Die Determinante  $\mathbf{J}$  ist positiv wenn die Knotennummerierung entgegen dem Uhrzeigersinn vorgenommen wurde. Die einzelnen Matrixelemente sind ebenfalls positiv, da die  $x$ -Werte alle in der rechten Halbebene liegen. Somit ist die Eigenschaft der Positiven-semidefinitheit gegeben, die für die Lösung des Gleichungssystems von Bedeutung ist.

### 3.5.4 Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix

Die Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrix ergab nach Gl. (3.5.6)

$$\mathbf{s} = 2\pi \iint_{A_0} \lambda \left( \frac{\partial \underline{f}}{\partial x} \frac{\partial \underline{f}^T}{\partial x}(\xi, \eta) + \frac{\partial \underline{f}}{\partial y} \frac{\partial \underline{f}^T}{\partial y}(\xi, \eta) \right) \mathbf{J} x(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (3.5.6)$$

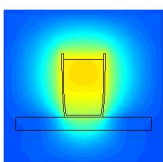
Werden die ortsunabhängigen Faktoren, die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  und die Determinante  $\mathbf{J}$  vor das Integral gezogen und die partiellen Ableitungen der Formfunktionen in Vektor- bzw. Matrixnotation angegeben, ist folgendes Integral zu betrachten.

$$\mathbf{s} = 2\pi \lambda \mathbf{J} \iint_{A_0} \left[ \begin{pmatrix} f_{1,x} \\ f_{2,x} \\ f_{3,x} \end{pmatrix} (f_{1,x} \ f_{2,x} \ f_{3,x}) + \cdots \cdots \begin{pmatrix} f_{1,y} \\ f_{2,y} \\ f_{3,y} \end{pmatrix} (f_{1,y} \ f_{2,y} \ f_{3,y}) \right] x(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.5.19)$$

Hier werden die Ableitungen der Formfunktion nach den Ortskoordinaten  $(x, y)$  benötigt. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Formfunktionen Funktionen von  $(\xi, \eta)$  sind. Diese sind wiederum von  $(x, y)$  abhängig. Daher erhält man die Ableitung durch Anwendung der Kettenregel.

$$f_{i,x} = \frac{\partial f_i}{\partial x}(\xi(x, y), \eta(x, y)) = \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial f_i}{\partial \eta} \eta_x \quad (3.5.20)$$

$$f_{i,y} = \frac{\partial f_i}{\partial y}(\xi(x, y), \eta(x, y)) = \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial f_i}{\partial \eta} \eta_y \quad (3.5.21)$$



$\xi_x, \xi_y, \eta_x$  und  $\eta_y$ , die inneren Ableitungen, erhält man, indem Gl. (3.5.3) nach  $\underline{\xi}$  umgestellt wird.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (x_2 - x_1) & (x_3 - x_1) \\ (y_2 - y_1) & (y_3 - y_1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\mathbf{J}} \begin{pmatrix} (y_3 - y_1) & -(y_2 - y_1) \\ -(x_3 - x_1) & (x_2 - x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \dots \\ &\quad \dots \frac{1}{\mathbf{J}} \begin{pmatrix} (y_3 - y_1) & -(y_2 - y_1) \\ -(x_3 - x_1) & (x_2 - x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.5.22)$$

Jetzt kann nach den Ableitungsregeln verfahren werden.  $x_1$  und  $y_1$  sind dabei konstante Werte, so dass deren Ableitung nach  $x$  bzw.  $y$  null ergibt. Die inneren Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{1}{\mathbf{J}}(y_3 - y_1), & \xi_y &= -\frac{1}{\mathbf{J}}(x_3 - x_1) \\ \eta_x &= -\frac{1}{\mathbf{J}}(y_2 - y_1), & \eta_y &= \frac{1}{\mathbf{J}}(x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (3.5.23)$$

Werden diese in Gl. (3.5.20) und Gl. (3.5.21) eingesetzt, können die Ableitungen der Formfunktionen nach  $x$  und  $y$  bestimmt werden.

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial x} = \begin{pmatrix} f_{1,x} \\ f_{2,x} \\ f_{3,x} \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathbf{J}} \begin{pmatrix} -(y_3 - y_1) + (y_2 - y_1) \\ (y_3 - y_1) \\ -(y_2 - y_1) \end{pmatrix} \quad (3.5.24)$$

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial y} = \begin{pmatrix} f_{1,y} \\ f_{2,y} \\ f_{3,y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathbf{J}} \begin{pmatrix} (x_3 - x_1) - (x_2 - x_1) \\ -(x_3 - x_1) \\ (x_2 - x_1) \end{pmatrix} \quad (3.5.25)$$

Damit kann die Steifigkeitsmatrix wie in (3.5.19) ausführlich aufgeschrieben und berechnet werden.

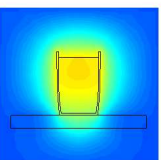
$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= 2\pi \lambda \mathbf{J} \dots \\ &\quad \dots \iint_{A_0} \frac{1}{\mathbf{J}^2} \left[ \begin{pmatrix} -(y_3 - y_1) + (y_2 - y_1) \\ (y_3 - y_1) \\ -(y_2 - y_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(y_3 - y_1) + (y_2 - y_1) \\ (y_3 - y_1) \\ -(y_2 - y_1) \end{pmatrix} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \begin{pmatrix} (x_3 - x_1) - (x_2 - x_1) \\ -(x_3 - x_1) \\ (x_2 - x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_3 - x_1) - (x_2 - x_1) \\ -(x_3 - x_1) \\ (x_2 - x_1) \end{pmatrix} \right] x(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.5.26)$$

Über das dyadische Produkt erhält man zwei Matrizen, die addiert und vereinfacht werden können. Gleichzeitig wird der von der Integration nicht betroffene Faktor  $\frac{1}{\mathbf{J}^2}$  vor das Integral gezogen, so entsteht:

$$\mathbf{s} = 2\pi \lambda \frac{1}{\mathbf{J}} \iint_{A_0} \begin{pmatrix} x_{32}^2 + y_{32}^2 & x_{32}x_{13} + y_{32}y_{13} & x_{32}x_{21} + y_{32}y_{21} \\ x_{32}x_{13} + y_{32}y_{13} & x_{13}^2 + y_{13}^2 & x_{13}x_{21} + y_{13}y_{21} \\ x_{32}x_{21} + y_{32}y_{21} & x_{13}x_{21} + y_{13}y_{21} & x_{21}^2 + y_{21}^2 \end{pmatrix} x(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (3.5.27)$$

Dabei wurden die Differenzen der Werte  $x_i - x_j$  mit  $x_{ij}$  und  $y_i - y_j$  mit  $y_{ij}$  abgekürzt. Diese Koordinatendifferenzen sind für ein Element konstant und können vor das Integral gezogen werden. Es verbleibt die  $x(\xi, \eta)$ -Komponente zur Integration. Diese wird nach Gl. (3.5.1) ersetzt.

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= 2\pi \lambda \frac{1}{\mathbf{J}} \begin{pmatrix} x_{32}^2 + y_{32}^2 & x_{32}x_{13} + y_{32}y_{13} & x_{32}x_{21} + y_{32}y_{21} \\ x_{32}x_{13} + y_{32}y_{13} & x_{13}^2 + y_{13}^2 & x_{13}x_{21} + y_{13}y_{21} \\ x_{32}x_{21} + y_{32}y_{21} & x_{13}x_{21} + y_{13}y_{21} & x_{21}^2 + y_{21}^2 \end{pmatrix} \dots \\ &\quad \dots \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta) d\eta d\xi \end{aligned} \quad (3.5.28)$$



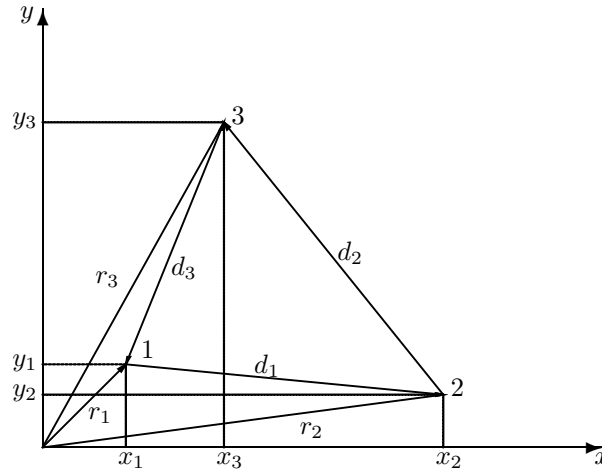


Abbildung 3.2: Dreieckselement in vektorieller Form

Das gelöste Integral ergibt  $\frac{1}{6}(x_1 + x_2 + x_3)$ . Damit folgt für die Steifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{s} = \pi \lambda \frac{1}{3} \frac{1}{\mathbf{J}} (x_1 + x_2 + x_3) \begin{pmatrix} x_{32}^2 + y_{32}^2 & x_{32}x_{13} + y_{32}y_{13} & x_{32}x_{21} + y_{32}y_{21} \\ x_{32}x_{13} + y_{32}y_{13} & x_{13}^2 + y_{13}^2 & x_{13}x_{21} + y_{13}y_{21} \\ x_{32}x_{21} + y_{32}y_{21} & x_{13}x_{21} + y_{13}y_{21} & x_{21}^2 + y_{21}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.5.29)$$

Die Steifigkeitsmatrixelemente lassen sich als Skalarprodukt der Differenzvektoren der Elementknoten deuten. Die Ortsvektoren zu den Knotenpunkten sind dann:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}. \quad (3.5.30)$$

Der positive Drehsinn kann erzeugt werden, indem die Differenzvektoren  $\underline{d}_i$  entsprechend aufgestellt werden. Anschaulich sind die Beträge die Seitenlängen des Elementes und die Richtungen der Vektoren ergeben den positiven Drehsinn, wie in Abbildung 3.5.4 dargestellt.

$$\underline{d}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{21} \\ y_{21} \end{pmatrix} \quad (3.5.31)$$

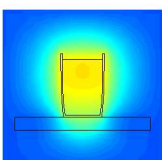
$$\underline{d}_2 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{32} \\ y_{32} \end{pmatrix} \quad (3.5.32)$$

$$\underline{d}_3 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ y_1 - y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{13} \\ y_{13} \end{pmatrix} \quad (3.5.33)$$

Mit dieser Vereinfachung erhält die Elementsteifigkeitsmatrix wie in Gl. (3.5.29) ihren endgültigen Schliff und lautet:

$$\mathbf{s} = \pi \lambda \frac{1}{3} \frac{1}{\mathbf{J}} (x_1 + x_2 + x_3) \begin{pmatrix} \underline{d}_2 \cdot \underline{d}_2 & \underline{d}_2 \cdot \underline{d}_3 & \underline{d}_2 \cdot \underline{d}_1 \\ \underline{d}_3 \cdot \underline{d}_2 & \underline{d}_3 \cdot \underline{d}_3 & \underline{d}_3 \cdot \underline{d}_1 \\ \underline{d}_1 \cdot \underline{d}_2 & \underline{d}_1 \cdot \underline{d}_3 & \underline{d}_1 \cdot \underline{d}_1 \end{pmatrix} \quad (3.5.34)$$

Diese Matrix ist, bis auf den Vorfaktor, eine GRAMSche Matrix, die stets symmetrisch und mindestens positiv semidefinit ist. Damit es eine positiv semidefinite Matrix bleibt, muss der Vorfaktor positiv sein. Aus diesem Grund wurden die Knoten entgegen dem Uhrzeigersinn, mathematisch positiv, durchnummeriert, denn so ist die Determinante  $\mathbf{J}$  positiv und damit auch die Elementsteifigkeitsmatrix. Wichtig wird dies für die Lösung des später entstehenden linearen Gleichungssystems mittels des CHOLESKY-Verfahrens.



### 3.5.5 Berechnung des Elementlastvektors

Um die Differentialgleichung zu komplettieren fehlt noch der Elementlastvektor. Die Gleichung für den Vektor ist nach Gl. (3.5.7):

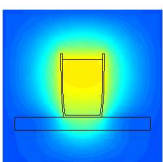
$$\underline{p} = 2\pi \iint_{A_0} q_E \underline{f}(\xi, \eta) \mathbf{J} x(\xi, \eta) d\xi d\eta . \quad (3.5.35)$$

Die Formfunktionen und die  $x(\xi, \eta)$ -Komponente werden aufgelöst. Die ortsunabhängige Funktionaldeterminante wird vor das Integral gezogen, so sieht der Elementlastvektor wie folgt aus:

$$\underline{p} = 2\pi \mathbf{J} \iint_{A_0} q_E \begin{pmatrix} 1 - \xi - \eta \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} (x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta) d\xi d\eta . \quad (3.5.36)$$

Wird das Produkt gebildet und anschließend integriert, ergibt sich schließlich der Lastvektor.

$$\underline{p} = \frac{\pi}{72} q_E \mathbf{J} \begin{pmatrix} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \end{pmatrix} \quad (3.5.37)$$



### 3.6 Aufbau des Gleichungssystems

Die einzelnen Komponenten, die bisher für ein Element aufgestellt wurden, sollen jetzt zusammengefasst werden. Dabei wird das gesamte Gebiet (Kaffeetasse und Umgebung) betrachtet. Dies besteht aus mehr als einem Element. Damit es bei der Erfassung nicht zu Komplikationen und damit zu einer falschen Lösung kommt, sollte einiges Grundlegendes sichergestellt werden. Die formale Wärmeleitungsgleichung

$$m\dot{u}(t) + su(t) = p(t) ,$$

die die Lösung des sowohl zeitlichen, als auch örtlichen Verlaufes der Temperatur für die Kaffeetasse und deren Umgebung liefert, kann Dank der Gleichungen (3.5.18), (3.5.34) und (3.5.37) bezüglich eines Elementes mit Leben gefüllt werden.

$$\begin{aligned} & \pi \rho c \frac{J}{10} \begin{pmatrix} x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 & \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3 & \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3 & \frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 & \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{3}x_3 & \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 & \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \\ \dot{u}_3(t) \end{pmatrix} + \dots \\ & \dots \pi \lambda \frac{1}{3} \frac{1}{J} (x_1 + x_2 + x_3) \begin{pmatrix} d_2 \cdot d_2 & d_2 \cdot d_3 & d_2 \cdot d_3 \\ d_3 \cdot d_2 & d_3 \cdot d_3 & d_3 \cdot d_1 \\ d_1 \cdot d_2 & d_1 \cdot d_3 & d_1 \cdot d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} \dots \\ & \dots = \frac{1}{72} q_E J \begin{pmatrix} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

In der Problemlösung wird das komplette Kaffeetassensystem in ein Vielzahl von Dreieckselementen unterteilt.

Wenn man voraussetzt, dass sich die Gesamtfläche in genau  $M$  Dreieckselement mit der Fläche  $A^{(l)}$  mit  $l = 1 \dots M$  unterteilen lässt folgt für die Gesamtfläche des Systems:

$$A = \sum_{l=1}^M A^{(l)} \quad (3.6.2)$$

Nun gehen wir wieder von der schwachen Formulierung ohne Randbedingungen aus. Diese werden später in das Gesamtsystem eingebaut. Wir integrieren jetzt jeden Summanden über alle  $M$  Elemente und summieren diese auf, so dass wir

$$\sum_{l=1}^M \left[ 2\pi \int_{A^{(l)}} \rho c \psi \frac{\partial T}{\partial t} dA \right] + \sum_{l=1}^M \left[ 2\pi \int_{A^{(l)}} \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \frac{\partial T}{\partial x_\mu} dA \right] = \sum_{l=1}^M \left[ 2\pi \int_{A^{(l)}} \psi q_E dA \right] , \quad \mu = 1, 2 \quad (3.6.3)$$

erhalten.

Ab sofort behandeln wir jedes der  $M$  Elemente genauso wie das erste Finite Element, d.h. für die Temperatur in jedem Element wird ein Ansatz für Formfunktionen aufgestellt, und in jedem Element werden Testfunktionen ausgewählt. Daraus folgt, dass Ergebnisse und Formen übernommen werden können.

Wir müssen nur beachten, dass gewisse Größen von Element zu Element unterschiedlich sein können. Um dies zu verdeutlichen, erhalten diese Größen einen oberen Index der die Zugehörigkeit zu ihrem Element darstellt.

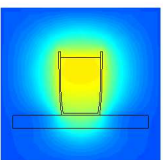
So ergeben sich näherungsweise folgende Formeln:

$$2\pi \int_{A^{(l)}} \rho c \psi \frac{\partial T}{\partial t} dA \approx \underline{v}^{(l)T} \mathbf{m}^{(l)} \underline{\dot{u}}^{(l)}(t) \quad (3.6.4)$$

$$2\pi \int_{A^{(l)}} \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \frac{\partial T}{\partial x_\mu} dA \approx \underline{v}^{(l)T} \mathbf{s}^{(l)} \underline{u}^{(l)}(t) , \quad \mu = 1, 2 \quad (3.6.5)$$

$$2\pi \int_{A^{(l)}} \psi q_E dA \approx \underline{v}^{(l)T} \underline{p}^{(l)}(t) \quad (3.6.6)$$

Auch die Berechnungsvorschriften für die Massen- und Steifigkeitsmatrix sowie den Lastvektor können übernommen werden. Wiederum werden die elementspezifischen Einheiten mit einem oberen



ren Index versehen.

$$\mathbf{m}^{(l)} = \pi \rho^{(l)} c^{(l)} \frac{\mathbf{J}^{(l)}}{10} \begin{pmatrix} x_1^{(l)} + \frac{1}{3}x_2^{(l)} + \frac{1}{3}x_3^{(l)} & \frac{1}{3}x_1^{(l)} + \frac{1}{3}x_2^{(l)} + \frac{1}{6}x_3^{(l)} & \frac{1}{3}x_1^{(l)} + \frac{1}{6}x_2^{(l)} + \frac{1}{3}x_3^{(l)} \\ \frac{1}{3}x_1^{(l)} + \frac{1}{3}x_2^{(l)} + \frac{1}{6}x_3^{(l)} & \frac{1}{3}x_1^{(l)} + x_2^{(l)} + \frac{1}{3}x_3^{(l)} & \frac{1}{6}x_1^{(l)} + \frac{1}{3}x_2^{(l)} + \frac{1}{3}x_3^{(l)} \\ \frac{1}{3}x_1^{(l)} + \frac{1}{6}x_2^{(l)} + \frac{1}{3}x_3^{(l)} & \frac{1}{6}x_1^{(l)} + \frac{1}{3}x_2^{(l)} + \frac{1}{3}x_3^{(l)} & \frac{1}{3}x_1^{(l)} + \frac{1}{3}x_2^{(l)} + x_3^{(l)} \end{pmatrix} \quad (3.6.7)$$

$$\mathbf{s}^{(l)} = \pi \lambda^{(l)} \frac{1}{3} \frac{1}{\mathbf{J}^{(l)}} (x_1^{(l)} + x_2^{(l)} + x_3^{(l)}) \begin{pmatrix} \underline{d}_2^{(l)} \cdot \underline{d}_2^{(l)} & \underline{d}_2^{(l)} \cdot \underline{d}_3^{(l)} & \underline{d}_2^{(l)} \cdot \underline{d}_1^{(l)} \\ \underline{d}_3^{(l)} \cdot \underline{d}_2^{(l)} & \underline{d}_3^{(l)} \cdot \underline{d}_3^{(l)} & \underline{d}_3^{(l)} \cdot \underline{d}_1^{(l)} \\ \underline{d}_1^{(l)} \cdot \underline{d}_2^{(l)} & \underline{d}_1^{(l)} \cdot \underline{d}_3^{(l)} & \underline{d}_1^{(l)} \cdot \underline{d}_1^{(l)} \end{pmatrix} \quad (3.6.8)$$

$$\underline{p}^{(l)} = \frac{\pi}{72} q_E^{(l)} \mathbf{J}^{(l)} \begin{pmatrix} x_1^{(l)} + \frac{1}{2}x_2^{(l)} + \frac{1}{2}x_3^{(l)} \\ \frac{1}{2}x_1^{(l)} + x_2^{(l)} + \frac{1}{2}x_3^{(l)} \\ \frac{1}{2}x_1^{(l)} + \frac{1}{2}x_2^{(l)} + x_3^{(l)} \end{pmatrix} \quad (3.6.9)$$

Setzen wir diese Formeln in die Ausgangsgleichung der schwachen Formulierung ein, so entsteht eine Näherung

$$\sum_{l=1}^M \left[ \underline{v}^{(l)T} \mathbf{m}^{(l)} \underline{u}^{(l)} \right] + \sum_{l=1}^M \left[ \underline{v}^{(l)T} \mathbf{s}^{(l)} \underline{u}^{(l)} \right] = \sum_{l=1}^M \left[ \underline{v}^{(l)T} \underline{p}^{(l)} \right] . \quad (3.6.10)$$

### 3.6.1 Aufbau des Gesamtgleichungssystems mit Hilfe von Zuordnungsmartizen

Jedes Dreieckelement besitzt drei Knotenpunkte, in denen die Temperaturen gespeichert sind. Das Gesamtsystem besteht aus  $M$  Dreieckelementen und enthält somit  $3M$  Knoten. Da die einzelnen Elemente aneinander liegen, besitzen diese die selben Knoten. Daraus folgt die gesamt Anzahl von Systemknoten ist  $N_{Kn} < 3M$ . Pro Systemknoten muss nur eine Temperatur bestimmt werden die in allen Elementen, die diesen Knoten besitzen, gleich ist. Somit entsteht über das gesamte Gebiet betrachtet ein stetiger Temperaturverlauf. Die unbekanntenen Temperaturen werden in einem Vektor, dem Systemtemperaturvektor, zusammengefasst.

$$\underline{u}^*(t) = \begin{pmatrix} u_1^*(t) \\ u_2^*(t) \\ \vdots \\ u_{N_{Kn}}^*(t) \end{pmatrix} \quad (3.6.11)$$

Nun wird ein Zusammenhang zwischen jeder einzelnen Elementtemperatur  $u_i^{(l)}$  und einer Systemtemperatur  $u_j^*$  gesucht. Dies wird mittels einer Zuordnungsmatrix  $\mathbf{a}^{(l)}$  erreicht.

$$\underline{u}^{(l)} = \mathbf{a}^{(l)} \underline{u}^* \quad (3.6.12)$$

Da die Zuordnung eindeutig ist, zu jeder Elementtemperatur gehört genau eine Systemtemperatur, steht in jeder Zeile der Zuordnungsmatrix  $\mathbf{a}^{(l)}$  genau eine 1, sonst nur 0. Die Anzahl der Spalten spiegelt die Systemtemperaturen wieder, die Anzahl der Zeilen die Elementtemperaturen. Folglich besitzt  $\mathbf{a}^{(l)}$  eine Abmessung von  $(3 \times N_{Kn})$  und sieht z.B. so aus:

$$\begin{pmatrix} u_1^{(l)} \\ u_2^{(l)} \\ u_3^{(l)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_1^* \\ \vdots \\ u_{N_{Kn}}^* \end{pmatrix} \quad (3.6.13)$$

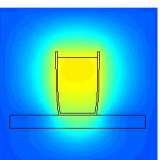
Entscheidend für die Stellung der Einsen ist die Nummerierung der System- und Elementtemperaturen.

Die Zuordnungsmatrix kann auch für den Testfunktionskoeffizienten herbeigezogen werden, somit folgt

$$\underline{v}^{(l)} = \mathbf{a}^{(l)} \underline{v}^* \Leftrightarrow \underline{v}^{(l)T} = \underline{v}^{*T} \mathbf{a}^{(l)T} \quad (3.6.14)$$

Diese Beziehungen werden wieder in die schwache Formulierung eingesetzt.

$$\underline{v}^{*T} \left[ \sum_{l=1}^M \mathbf{a}^{(l)T} \mathbf{m}^{(l)} \mathbf{a}^{(l)} \right] \underline{u}^* + \underline{v}^{*T} \left[ \sum_{l=1}^M \mathbf{a}^{(l)T} \mathbf{s}^{(l)} \mathbf{a}^{(l)} \right] \underline{u}^* = \underline{v}^{*T} \left[ \sum_{l=1}^M \mathbf{a}^{(l)T} \underline{p}^{(l)} \right] \quad (3.6.15)$$



Für die Summen in den eckigen Klammern setzen wir folgende Bezeichnungen fest:

$$\mathbf{M}^* = \sum_{l=1}^M \mathbf{a}^{(l)T} \mathbf{m}^{(l)} \mathbf{a}^{(l)} \quad (3.6.16)$$

$$\mathbf{S}^* = \sum_{l=1}^M \mathbf{a}^{(l)T} \mathbf{s}^{(l)} \mathbf{a}^{(l)} \quad (3.6.17)$$

$$\underline{p}^* = \sum_{l=1}^M \mathbf{a}^{(l)T} \underline{p}^{(l)} \quad (3.6.18)$$

Die beiden Systemmatrizen  $\mathbf{M}^*$  und  $\mathbf{S}^*$  sind quadratisch und symmetrisch bei einer Abmessung von  $(N_{Kn} \times N_{Kn})$ , der Systemlastvektor besitzt eine Abmessung von  $(N_{Kn} \times 1)$ . Mit den eingeführten Abkürzungen wandelt sich die Gleichung zu:

$$\underline{v}^{*T} (\mathbf{M}^* \underline{u}^* + \mathbf{S}^* \underline{u}^* - \underline{p}^*) = 0 . \quad (3.6.19)$$

Die Gleichung wird nur erfüllt, wenn der Vektor in den runden Klammern verschwindet. Daraus ergibt sich das gewöhnliche Zeitdifferentialgleichungssystem:

$$\mathbf{M}^* \underline{\dot{u}}^* + \mathbf{S}^* \underline{u}^* = \underline{p}^* . \quad (3.6.20)$$

In der Gleichung sind nach wie vor keine Randbedingungen berücksichtigt, diese werden erst später eingebaut.

Um Klarheit zu schaffen, folgt nun der Aufbau des Gesamtsystems anhand eines einfachen Beispiels.

### 3.6.2 Erläuterung anhand eines Beispiels

Der Aufbau des Gesamtsystems soll nun mittels eines einfachen Beispiels erläutert werden. Das Beispiel ist unterteilt in vier Dreieckselement (eingekästelte Zahlen) und besitzt fünf Systemknoten (eingekreiste Zahlen). Die Knoten innerhalb jedes Elements sind hier entgegen dem Uhrzeigersinn durchnummeriert (kleine Zahlen) und stellen die lokalen Elementtemperaturen dar.

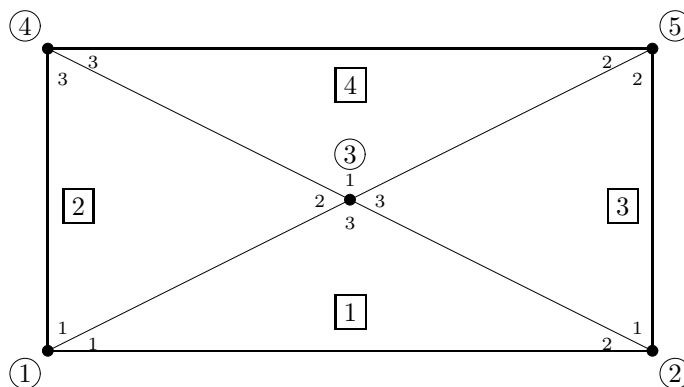
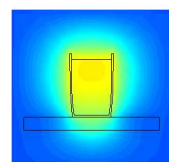


Abbildung 3.3: kleines Zuordnungsbeispiel

Im Gesamtsystem ist ein stetiger Temperaturverlauf vorausgesetzt, d.h. an Systemknoten an denen mehrere Elemente anliegen müssen die Elementtemperaturen gleich groß sein. Deshalb ergibt sich für die  $N_{Kn} = 5$  Systemknoten in unserem Beispiel folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} u_1^* &= u_1^{(1)} = u_1^{(2)} \\ u_2^* &= u_2^{(1)} = u_1^{(3)} \\ u_3^* &= u_3^{(1)} = u_2^{(2)} = u_3^{(3)} = u_1^{(4)} \\ u_4^* &= u_3^{(2)} = u_3^{(4)} \\ u_5^* &= u_2^{(3)} = u_2^{(4)} \end{aligned} \quad (3.6.21)$$



Nachdem wir den Systemtemperaturvektor  $\underline{u}^* = (u_1^* \ u_2^* \ u_3^* \ u_4^* \ u_5^*)$  erzeugt haben, versuchen wir nun die Beziehung zwischen Element- und Systemtemperatur im Sinne von

$$\underline{u}^{(l)} = \mathbf{a}^{(l)} \underline{u}^* , \quad l = 1 \dots 4 \quad (3.6.22)$$

aufzustellen.

Zur Erinnerung, in der Zuordnungsmatrix  $\mathbf{a}^{(l)}$  des Elementes  $l$  symbolisieren die Zeilen die Elementtemperaturen und die Spalten die Systemtemperaturen bzw. -knoten. D. h. wenn beispielsweise in der Zuordnungsmatrix des Elementes  $l$  in der Zeile  $z$  und Spalte  $s$  eine 1 steht, muss sich im Gesamtsystem am Knotenpunkt  $s$  (eingekreiste Zahl) im Element  $l$  (eingekästelte Zahl) die Elementtemperatur  $z$  (kleine Zahl) befinden.

So ergeben sich die folgende Beziehung und Zuordnungsmatrizen:

$$\underline{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \\ u_4^* \\ u_5^* \end{pmatrix} = \mathbf{a}^{(1)} u^* , \quad (3.6.23)$$

$$\underline{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \\ u_4^* \\ u_5^* \end{pmatrix} = \mathbf{a}^{(2)} u^* , \quad (3.6.24)$$

$$\underline{u}^{(3)} = \begin{pmatrix} u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \\ u_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \\ u_4^* \\ u_5^* \end{pmatrix} = \mathbf{a}^{(3)} u^* , \quad (3.6.25)$$

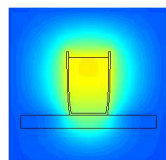
$$\underline{u}^{(4)} = \begin{pmatrix} u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \\ u_3^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \\ u_4^* \\ u_5^* \end{pmatrix} = \mathbf{a}^{(4)} u^* \quad (3.6.26)$$

Zur Überprüfung schildern wir noch einmal ein konkretes Beispiel. In der Zuordnungsmatrix  $\mathbf{a}^{(2)}$  steht in der 2. Zeile und in der 3. Spalte eine 1. Vergleichen wir diese Information mit der Abbildung 3.3 unseres einfachen Beispiels, sehen wir im Element 2 am Systemknoten 3 den Elementtemperaturwert von 2.

Mit Hilfe der Zuordnungsmatrizen können wir die Systemmatrizen berechnen. Im folgenden werden wir dies an der Systemsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{S}^*$  genauer aufzeigen. Die Berechnung der Systemmassenmatrix  $\mathbf{M}^*$  ist äquivalent und die des Systemlastvektors  $\underline{p}$  folgt danach. Die Gleichung zur Berechnung der Systemsteifigkeitsmatrix lautet:

$$\mathbf{S}^* = \sum_{l=1}^{M=4} \mathbf{a}^{(l)T} \mathbf{s}^{(l)} \mathbf{a}^{(l)} \quad (3.6.27)$$

Die Systemsteifigkeitsmatrizen der einzelnen Elemente werden demnach durch Matrixmultiplikation ermittelt und danach über alle Elemente aufsummiert. Somit ergeben sich die dargestellten



Summanden und schließlich die Systemsteifigkeitsmatrix zu:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}^* &= \begin{pmatrix} s_{11}^{(1)} & s_{12}^{(1)} & s_{13}^{(1)} & 0 & 0 \\ s_{21}^{(1)} & s_{22}^{(1)} & s_{23}^{(1)} & 0 & 0 \\ s_{31}^{(1)} & s_{32}^{(1)} & s_{33}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{11}^{(2)} & 0 & s_{12}^{(2)} & s_{13}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_{21}^{(2)} & 0 & s_{22}^{(2)} & s_{23}^{(2)} & 0 \\ s_{31}^{(2)} & 0 & s_{32}^{(2)} & s_{33}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots \\
 &\dots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{11}^{(3)} & s_{13}^{(3)} & 0 & s_{12}^{(3)} \\ 0 & s_{31}^{(3)} & s_{33}^{(3)} & 0 & s_{32}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{21}^{(3)} & s_{23}^{(3)} & 0 & s_{22}^{(3)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{11}^{(4)} & s_{13}^{(4)} & s_{12}^{(4)} \\ 0 & 0 & s_{31}^{(4)} & s_{33}^{(4)} & s_{32}^{(4)} \\ 0 & 0 & s_{21}^{(4)} & s_{23}^{(4)} & s_{22}^{(4)} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} s_{11}^{(1)}+s_{11}^{(2)} & s_{12}^{(1)} & s_{13}^{(1)}+s_{12}^{(2)} & s_{13}^{(2)} & 0 \\ s_{21}^{(1)} & s_{22}^{(1)}+s_{11}^{(3)} & s_{23}^{(1)}+s_{13}^{(3)} & 0 & s_{12}^{(3)} \\ s_{31}^{(1)}+s_{21}^{(2)} & s_{32}^{(1)}+s_{31}^{(3)} & s_{33}^{(1)}+s_{22}^{(2)}+s_{33}^{(3)}+s_{11}^{(4)} & s_{23}^{(2)}+s_{13}^{(4)} & s_{32}^{(3)}+s_{12}^{(4)} \\ s_{31}^{(2)} & 0 & s_{32}^{(2)}+s_{31}^{(4)} & s_{33}^{(2)}+s_{33}^{(4)} & s_{32}^{(4)} \\ 0 & s_{21}^{(3)} & s_{23}^{(3)}+s_{21}^{(4)} & s_{23}^{(4)} & s_{22}^{(3)}+s_{22}^{(4)} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.6.28}$$

In der Systemsteifigkeitsmatrix können wir beobachten, dass sich an manchen Stellen Anteile verschiedener Elementmatrizen überlagern. Das ist darauf zurückzuführen, dass sich an diesen Stellen im Gebiet mehrere Elemente einen Knoten teilen. Betrachten wir diese Eigenschaften etwas genauer gilt z.B.:

- die Elemente  $\boxed{3}$  und  $\boxed{4}$  haben die Knoten 3 und 5 gemeinsam. In  $\mathbf{S}^*$  überlagern sich an den Stellen 33, 55, 35 und 53 Anteile der Elementmatrizen  $\mathbf{s}^{(3)}$  und  $\mathbf{s}^{(4)}$ ;
- die Elemente  $\boxed{2}$  und  $\boxed{4}$  teilen sich die Knoten 3 und 4. In  $\mathbf{s}^*$  überlagern sich an den Stellen 33, 44, 34 und 43 Anteile der Elementmatrizen  $\mathbf{s}^{(2)}$  und  $\mathbf{s}^{(4)}$ ;
- alle Elemente teilen sich den Knoten 3, demzufolge enthält  $\mathbf{s}_{33}^*$  Anteile von allen 4 Elementen

Der Systemlastvektor  $\underline{p}^*$  berechnet sich folgendermaßen:

$$\underline{p}^* = \sum_{l=1}^{M=4} \mathbf{a}^{(l)T} \underline{p}^{(l)} \tag{3.6.29}$$

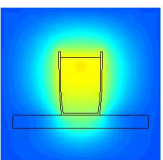
und somit ergeben sich für die einzelnen Elemente die Summanden und schließlich der Systemlastvektor zu:

$$\underline{p}^* = \begin{pmatrix} p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \\ p_3^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1^{(2)} \\ 0 \\ p_2^{(2)} \\ p_3^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ p_1^{(3)} \\ p_3^{(3)} \\ 0 \\ p_2^{(3)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_1^{(4)} \\ p_3^{(4)} \\ p_2^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^{(1)} + p_1^{(2)} \\ p_2^{(1)} + p_1^{(3)} \\ p_3^{(1)} + p_2^{(2)} + p_3^{(3)} + p_1^{(4)} \\ p_3^{(2)} + p_3^{(4)} \\ p_2^{(3)} + p_2^{(4)} \end{pmatrix} \tag{3.6.30}$$

Auch im Ergebnis des Systemlastvektors entstehen Überlagerungen, dies ist wiederum mit gemeinsamen Systemknoten von mehreren Elementen zu erklären.

- Am Systemknoten  $\boxed{1}$  liegen die Elemente 1 und 2 mit den Elementtemperaturen 1 und 1 an, dies entspricht der 1. Zeile des Systemlastvektors.
- Am Systemknoten  $\boxed{2}$  liegen die Elemente 1 und 3 mit den Elementtemperaturen 2 und 1 an, abzulesen in der 2. Zeile von  $\underline{p}^*$ .
- Am Knotenpunkt  $\boxed{3}$  liegen wiederum alle Elemente an, daher stehen von allen Elementvektoren Anteile in Zeile 3 von  $\underline{p}^*$ , usw ...

Die Überlagerungen in den Systemmatrizen und dem Systemlastvektor hängen maßgeblich von der Nummerierung des System- und Elementtemperaturen ab. Dies wird im folgenden Abschnitt deutlich, indem wir eine alternative Methode zum Aufbau der Systemmatrizen betrachten.



### 3.6.3 Aufbau der Systemmatrizen mit Hilfe von Indextafeln

Die oben aufgezeigte Methode zur Erzeugung der Systemmatrizen mittels Zuordnungsmatrizen ist in der praktischen Anwendung viel zu aufwändig. Besitzt ein Gebiet beispielsweise 1000 Dreieckselemente müssen 1000(3 × 1000) Zuordnungsmatrizen erstellt werden und schließlich zur Berechnung der Systemmatrizen 2000 Matrixmultiplikationen durchgeführt werden.

Deshalb muss eine Alternative, ein schnellerer Weg, gefunden werden, die Systemmatrizen zu berechnen bzw. aufzufüllen. Dies wird möglich mit Hilfe sog. Indextafeln.

Zur Erläuterung betrachten wir nochmals im oben aufgeführten einfachen Beispiel die Einsortierung der Elementmatrizen in die Systemmatrizen genauer. Wir stellen folgende Zusammenhänge fest:

- Die Knotennummer (eingekreiste Zahlen) der 1. lokalen Elementtemperatur (kleine Zahlen) bestimmt, in welche Spalte der Systemmatrix  $\mathbf{S}^*$  die Elemente der 1. Spalte der Elementmatrix einsortiert werden.
- Allgemein gilt: Besitzt das Element  $l$  den Knoten  $k$  an 1. Elementtemperatur, wird in  $\mathbf{S}^*$  in der  $k$ .ten Spalte die 1. Spalte von der Elementmatrix  $\mathbf{s}^{(l)}$  eingefügt. die Knotennummer der 2. lokalen Elementtemperatur bestimmen, in welche Spalte der Systemmatrix  $\mathbf{S}^*$  die Elemente der 2. Spalte der Elementmatrix einsortiert werden.
- Allgemein gilt: Besitzt das Element  $l$  den Knoten  $k$  an 2. Elementtemperatur, wird in  $\mathbf{S}^*$  in der  $k$ .ten Spalte die 2. Spalte von der Elementmatrix  $\mathbf{s}^{(l)}$  eingefügt.
- Analog dazu wird die 3. Spalte behandelt.

Bei den Zeilen läuft es genauso ab:

Die Systemnummer der 1. lokalen Elementtemperatur bestimmt, in welche Zeile von  $\mathbf{S}^*$  die Elemente der 1. Zeile der Elementmatrix eingefügt werden.

- Im Allgemeinen gilt also: Besitzt das Element  $l$  den Knoten  $k$  an 1. Elementtemperatur, wird in  $\mathbf{S}^*$  in der  $k$ -ten Zeile die 1. Zeile der Elementmatrix  $\mathbf{s}^{(l)}$  eingefügt.
- Analog können die restliche Zeilen der Systemmatrix mit den Zeilen der Elementmatrizen gefüllt werden.

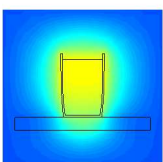
Übersichtlicher ist die Vorgehensweise, wenn wir eine Tabelle aufstellen, die sog. Indextafel, in der die Zuordnung der Elementtemperaturen  $u_j^{(l)}$  zu den Systemtemperaturen  $u_i^*$  aufgelistet werden. Für unser Beispiel lautet die Indextafel: Diese Tafel reicht aus, um jeden Eintrag der Elementmatrizen

Elementnr. $l$	$u_1^{(1)}$	$u_2^{(2)}$	$u_3^{(3)}$
$l = 1$	1	2	3
$l = 2$	1	3	4
$l = 3$	2	5	3
$l = 4$	3	5	4

Tabelle 3.1: Indextafel des Beispiels

an die richtige Stelle der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{S}^*$  zu platzieren. Nimmt man nun ein beliebigen Eintrag aus einer Elementmatrix, z.B.  $s_{zs}^{(l)}$ , so kann sofort die Stelle in der Steifigkeitsmatrix abgelesen werden. In der  $l$ -ten Zeile stehen die Zeile und Spalte, in die der Wert eingetragen werden muss, an den Positionen  $u_z^{(l)}$  und  $u_s^{(l)}$ . Zur Kontrolle testen wir einige Werte:

- $s_{13}^2$ : an den Stellen 1 und 3 der 2. Zeile in der Indextafel befinden sich die Werte 1 und 4. Daraus folgt, dass der Wert  $s_{13}^2$  in die 1. Zeile der 4. Spalte von  $\mathbf{S}^*$  eingetragen wird. Oder kurz:  
 $s_{13}^2 \rightarrow S_{14}^*$
- weitere Werte:  
 $s_{32}^3 \rightarrow S_{35}^*$   
 $s_{21}^1 \rightarrow S_{21}^*$   
 usw...



Die Aufstellung der Systemmassenmatrix  $\mathbf{M}^*$  erfolgt analog. Beim Aufbau des Systemlastvektors geben die Einträge der Indextafel die Zeilen des Systemlastvektors an, in denen die Elemente eingefügt werden sollen.

Die oben geschilderte Vorgehensweise liefert auch die Grundlage für den implementierten Algorithmus des praktischen Teils des Projekts.

Bisher wurde angenommen das keine Randbedingungen auftreten. Der Einbau dieser speziellen Eigenschaften ist Thema des nächsten Abschnitts.

### 3.7 Einbau der Randbedingungen

Die Kaffeetasse und der Raum in dem sie sich befindet werden nur zur Hälfte modelliert, die Y-Achse des Koordinatensystems ist unsere Rotationsachse. Welche Seite der Kaffeetasse man modelliert ist dabei unerheblich, denn die Fläche wird danach um  $360^\circ$  rotiert.

Wie bei der Herleitung des Lastvektors schon erwähnt, kommt das Modell der Kaffeetasse ohne CAUCHY-Randbedingungen aus.

Wir benötigen lediglich homogene NEUMANN-Randbedingungen an der Rotationsachse des Modells, damit dort keine Wärme entweichen kann. Dadurch ist der NEUMANN-Anteil des Lastvektors ebenfalls 0 und wird durch Nichts-tun schon erzeugt.

Der umgebende Raum wird als unendlich weit ausgedehnt angenommen und soll sich durch die warme Kaffeetasse nicht erwärmen. Letztendlich wird sich ein geschlossener Raum mit  $20\text{m}^2$  nur unwesentlich durch einen warmen Kaffee beeinflussen lassen. Deswegen haben wir den Raum angemessen weit modelliert und den Rand mit DIRICHLET-Randbedingungen auf konstante  $20^\circ\text{C}$  gesetzt. Es ist also nur notwendig die DIRICHLET-Randbedingungen einzubauen.

Das Gleichungssystem

$$\mathbf{M}^* \underline{\dot{u}}^* + \mathbf{S}^* \underline{u}^* = \underline{p}^*$$

mit den bekannten DIRICHLET-Temperaturen in den Knoten 1 und 4

$$u_1^* = u_{1D}^* \text{ und } u_4^* = u_{4D}^*$$

ausgeschrieben für ein Gebiet mit 5 Knoten

$$\begin{pmatrix} M_{11}^* & M_{12}^* & M_{13}^* & M_{14}^* & M_{15}^* \\ M_{21}^* & M_{22}^* & M_{23}^* & M_{24}^* & M_{25}^* \\ M_{31}^* & M_{32}^* & M_{33}^* & M_{34}^* & M_{35}^* \\ M_{41}^* & M_{42}^* & M_{43}^* & M_{44}^* & M_{45}^* \\ M_{51}^* & M_{52}^* & M_{53}^* & M_{54}^* & M_{55}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1^* = \dot{u}_{1D}^* \\ \dot{u}_2^* \\ \dot{u}_3^* \\ \dot{u}_4^* = \dot{u}_{4D}^* \\ \dot{u}_5^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* & S_{13}^* & S_{14}^* & S_{15}^* \\ S_{21}^* & S_{22}^* & S_{23}^* & S_{24}^* & S_{25}^* \\ S_{31}^* & S_{32}^* & S_{33}^* & S_{34}^* & S_{35}^* \\ S_{41}^* & S_{42}^* & S_{43}^* & S_{44}^* & S_{45}^* \\ S_{51}^* & S_{52}^* & S_{53}^* & S_{54}^* & S_{55}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^* = u_{1D}^* \\ u_2^* \\ u_3^* \\ u_4^* = u_{4D}^* \\ u_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \\ p_5^* \end{pmatrix}$$

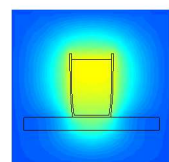
läßt sich umschreiben zu

$$\begin{aligned} \dot{u}_{1D}^* \begin{pmatrix} M_{11}^* \\ M_{21}^* \\ M_{31}^* \\ M_{41}^* \\ M_{51}^* \end{pmatrix} + \dot{u}_2^* \begin{pmatrix} M_{12}^* \\ M_{22}^* \\ M_{32}^* \\ M_{42}^* \\ M_{52}^* \end{pmatrix} + \dot{u}_3^* \begin{pmatrix} M_{13}^* \\ M_{23}^* \\ M_{33}^* \\ M_{43}^* \\ M_{53}^* \end{pmatrix} + \dot{u}_{4D}^* \begin{pmatrix} M_{14}^* \\ M_{24}^* \\ M_{34}^* \\ M_{44}^* \\ M_{54}^* \end{pmatrix} + \dot{u}_5^* \begin{pmatrix} M_{15}^* \\ M_{25}^* \\ M_{35}^* \\ M_{45}^* \\ M_{55}^* \end{pmatrix} \dots \\ + u_{1D}^* \begin{pmatrix} S_{11}^* \\ S_{21}^* \\ S_{31}^* \\ S_{41}^* \\ S_{51}^* \end{pmatrix} + u_2^* \begin{pmatrix} S_{12}^* \\ S_{22}^* \\ S_{32}^* \\ S_{42}^* \\ S_{52}^* \end{pmatrix} + u_3^* \begin{pmatrix} S_{13}^* \\ S_{23}^* \\ S_{33}^* \\ S_{43}^* \\ S_{53}^* \end{pmatrix} + u_{4D}^* \begin{pmatrix} S_{14}^* \\ S_{24}^* \\ S_{34}^* \\ S_{44}^* \\ S_{54}^* \end{pmatrix} + u_5^* \begin{pmatrix} S_{15}^* \\ S_{25}^* \\ S_{35}^* \\ S_{45}^* \\ S_{55}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \\ p_5^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die bekannten Terme (also die Summanden mit den DIRICHLET-Temperaturen) werden auf die rechte Seite geholt.

Die 1. zeitliche Ableitung einer konstanten Temperatur ergibt 0, somit entfallen die Massenmatrixvektoren mit den DIRICHLET-Temperaturen.

$$\begin{aligned} \dot{u}_2^* \begin{pmatrix} M_{12}^* \\ M_{22}^* \\ M_{32}^* \\ M_{42}^* \\ M_{52}^* \end{pmatrix} + \dot{u}_3^* \begin{pmatrix} M_{13}^* \\ M_{23}^* \\ M_{33}^* \\ M_{43}^* \\ M_{53}^* \end{pmatrix} + \dot{u}_5^* \begin{pmatrix} M_{15}^* \\ M_{25}^* \\ M_{35}^* \\ M_{45}^* \\ M_{55}^* \end{pmatrix} + u_2^* \begin{pmatrix} S_{12}^* \\ S_{22}^* \\ S_{32}^* \\ S_{42}^* \\ S_{52}^* \end{pmatrix} + u_3^* \begin{pmatrix} S_{13}^* \\ S_{23}^* \\ S_{33}^* \\ S_{43}^* \\ S_{53}^* \end{pmatrix} + u_5^* \begin{pmatrix} S_{15}^* \\ S_{25}^* \\ S_{35}^* \\ S_{45}^* \\ S_{55}^* \end{pmatrix} = \dots \\ \begin{pmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \\ p_5^* \end{pmatrix} - u_{1D}^* \begin{pmatrix} S_{11}^* \\ S_{21}^* \\ S_{31}^* \\ S_{41}^* \\ S_{51}^* \end{pmatrix} - u_{4D}^* \begin{pmatrix} S_{14}^* \\ S_{24}^* \\ S_{34}^* \\ S_{44}^* \\ S_{54}^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$



in Matrixschreibweise ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 0 & M_{12}^* & M_{13}^* & 0 & M_{15}^* \\ 0 & M_{22}^* & M_{23}^* & 0 & M_{25}^* \\ 0 & M_{32}^* & M_{33}^* & 0 & M_{35}^* \\ 0 & M_{42}^* & M_{43}^* & 0 & M_{45}^* \\ 0 & M_{52}^* & M_{53}^* & 0 & M_{55}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1^* \\ \dot{u}_2^* \\ \dot{u}_3^* \\ \dot{u}_4^* \\ \dot{u}_5^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & S_{12}^* & S_{13}^* & 0 & S_{15}^* \\ 0 & S_{22}^* & S_{23}^* & 0 & S_{25}^* \\ 0 & S_{32}^* & S_{33}^* & 0 & S_{35}^* \\ 0 & S_{42}^* & S_{43}^* & 0 & S_{45}^* \\ 0 & S_{52}^* & S_{53}^* & 0 & S_{55}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \\ u_4^* \\ u_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \\ p_5^* \end{pmatrix} - u_{1D}^* \begin{pmatrix} S_{11}^* \\ S_{21}^* \\ S_{31}^* \\ S_{41}^* \\ S_{51}^* \end{pmatrix} - u_{4D}^* \begin{pmatrix} S_{14}^* \\ S_{24}^* \\ S_{34}^* \\ S_{44}^* \\ S_{54}^* \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem ist jetzt überbestimmt, da nur noch drei unbekannte Knotentemperaturen gesucht werden. Man kann nun die Zeilen und Spalten der bekannten DIRICHLET-Temperaturen entfernen.

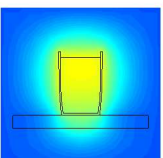
$$\begin{pmatrix} M_{22}^* & M_{23}^* & M_{25}^* \\ M_{32}^* & M_{33}^* & M_{35}^* \\ M_{52}^* & M_{53}^* & M_{55}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_2^* \\ \dot{u}_3^* \\ \dot{u}_5^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{22}^* & S_{23}^* & S_{25}^* \\ S_{32}^* & S_{33}^* & S_{35}^* \\ S_{52}^* & S_{53}^* & S_{55}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^* \\ u_3^* \\ u_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2^* \\ p_3^* \\ p_5^* \end{pmatrix} - u_{1D}^* \begin{pmatrix} S_{21}^* \\ S_{31}^* \\ S_{51}^* \end{pmatrix} - u_{4D}^* \begin{pmatrix} S_{24}^* \\ S_{34}^* \\ S_{54}^* \end{pmatrix}$$

Dieses Entfernen der Spalten und Zeilen ist programmtechnisch schwieriger umzusetzen als folgende Pseudogleichungen einzubauen.

$$1 u_1^* = u_{1D}^* \quad \text{und} \quad 1 u_4^* = u_{4D}^*$$

Mit diesen ergibt sich das folgende Gleichungssystem, das wieder die gleichen Dimensionen wie das ursprüngliche Gleichungssystem aufweist.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{22}^* & M_{23}^* & 0 & M_{25}^* \\ 0 & M_{32}^* & M_{33}^* & 0 & M_{35}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{52}^* & M_{53}^* & 0 & M_{55}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1^* \\ \dot{u}_2^* \\ \dot{u}_3^* \\ \dot{u}_4^* \\ \dot{u}_5^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{22}^* & S_{23}^* & 0 & S_{25}^* \\ 0 & S_{32}^* & S_{33}^* & 0 & S_{35}^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & S_{52}^* & S_{53}^* & 0 & S_{55}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \\ u_4^* \\ u_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_5^* \end{pmatrix} - u_{1D}^* \begin{pmatrix} -1 \\ S_{21}^* \\ S_{31}^* \\ 0 \\ S_{51}^* \end{pmatrix} - u_{4D}^* \begin{pmatrix} 0 \\ S_{24}^* \\ S_{34}^* \\ -1 \\ S_{54}^* \end{pmatrix}$$



# Kapitel 4

## Numerische Lösungsverfahren

Die Aufgabe, das Betrachten des Abkühlvorganges der Kaffeetasse, ist ein instationäres Problem und führt daher auf eine Differentialgleichung, exakter auf ein Anfangwertproblem

$$m\dot{y}(t) + sy(t) = p(t) . \quad (4.0.1)$$

Diese zu lösen steht hier im Mittelpunkt. Es können mehrere unterschiedlich gute Verfahren eingesetzt werden, um die Differentialgleichung zu lösen. Die Wahl zur numerischen Lösung der Differentialgleichung fiel dabei auf das EULER-Verfahren oder genauer gesagt auf das CRANK-NICHOLSON-Verfahren. Das EULER- sowie das CRANK-NICHOLSON-Verfahren sind Einschrittverfahren und geben nach einmaligem Anwenden die gesuchte Lösung an. Hierbei soll geklärt werden, wie solches Einschrittverfahren aussieht und wie es Zustände kommt, welche Rolle es bei der Problemlösung spielt und wie es realisiert wird.

Am Ende wird dann ein lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}$$

stehen, welches es zu berechnen gilt, um die gesuchten Knotentemperaturen zu erhalten. Dies wiederum ist Inhalt des zweiten Teils dieses Kapitels, hier wird die CHOLESKY-Zerlegung vorgestellt und erklärt.

### 4.1 Crank-Nicholson-Verfahren

Es wird zu einer bestimmten Zeit  $t_i$  einen bestimmten Wert  $y_i$  gesucht bzw. die Approximation  $u_i$ . Dazu wird auf dem zu betrachtenden Intervall ein Gitter eingeführt mit den Schrittweiten  $h_i$ , so dass das Kontinuum diskretisiert ist. Dabei müssen die Schrittweiten nicht äquidistant sein. Dann werden, ausgehend vom Anfangswert  $u_0 = y(t_0)$  sukzessive die Näherungen  $u_i$  zu den Punkten  $t_i$  berechnet. In allgemeiner Form sieht ein *explizites* Einschrittverfahren folgendermaßen aus.

$$\begin{aligned} u_0 &= y(t_0) \\ u_{i+1} &= u_i + h_i \Phi(t_i, u_i, h_i, f) \quad , i = 0, 1, 2, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Hierbei ist  $\Phi(t_i, u_i, h_i, f)$  die Inkrementfunktion. Sie beschreibt wie der nächste Näherungswert aus  $t_i, u_i$  und der Schrittweite  $h_i$  berechnet wird.

Beim *expliziten* EULER-Verfahren wird die Ableitung  $\dot{y}(t)$  durch den Differenzenquotienten genähert.

$$\dot{y} \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = f(t, y(t)) \quad (4.1.2)$$

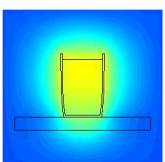
Oder etwas umgestellt

$$y(t+h) = y(t) + hf(t, y(t)) \quad (4.1.3)$$

und für die Approximation folgt daraus

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h_i} = f(t_i, u_i) \quad , i = 0, 1, \dots, m-1 \quad (4.1.4)$$

$$u_{i+1} = u_i + h_i f(t_i, u_i) \quad (4.1.5)$$



Also gilt beim *expliziten* EULER-Verfahren

$$\Phi(t_i, u_i, h_i, f) = f(t_i, u_i) . \quad (4.1.6)$$

Wie zu sehen ist, wird  $u_{i+1}$  aus den Anfangswerten  $t_i, u_i$  berechnet, daher auch *explizites* EULER-Verfahren. Der Endwert kann direkt aus den Anfangswerten bestimmt werden.

Werden anstatt der Anfangswerte die Endwerte  $t_{i+1}, u_{i+1}$  genutzt um  $u_{i+1}$  zu bestimmen, spricht man vom *impliziten* EULER-Verfahren.

$$u_{i+1} = u_i + h_i f(t_{i+1}, u_{i+1}) \quad (4.1.7)$$

Da das *explizite* EULER-Verfahren für instabile Differentialgleichungen keine brauchbaren Lösungen anbietet, würde es ausreichen nur das *implizite* EULER-Verfahren anzuwenden. Allerdings ergibt sich die beste numerische Lösung durch eine Gewichtung beider Verfahren. Dabei werden die Anfangs- bzw. Endwerte mit einem Gewichtungsfaktor  $\Theta$  versehen. Dies führt zum CRANK-NICHOLSON-Verfahren. Dabei werden das *implizite* und *explizite* EULER-Verfahren zu gleichen Teilen gewichtet.

$$u_{i+1} = u_i + h_i \Phi(t_i, t_{i+1}, u_i, u_{i+1}, h_i, \Theta, f) \quad (4.1.8)$$

Die gezeigten Approximationen gelten natürlich auch für den Vektorfall, von dem später noch Gebrauch gemacht wird. Durch komponentenweise Betrachtung gelangt man schnell und einfach zur vektoriellen Form. Hier der allgemeine Fall:

$$\underline{u}_{i+1} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}_{i+1} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}_i + h_i \begin{pmatrix} \Phi_1(t_i, \underline{u}_i, h_i, f) \\ \vdots \\ \Phi_n(t_i, \underline{u}_i, h_i, f) \end{pmatrix} = \underline{u}_i + h_i \underline{\Phi}(t_i, \underline{u}_i, h_i, f) \quad (4.1.9)$$

#### 4.1.1 Anwendung auf das Anfangswertproblem

Ausgangspunkt ist das instationären Anfangswertproblem Gl. (4.0.1)

$$m\dot{y}(t) + sy(t) = p(t) .$$

Werden die Approximationen

$$y(t_i) = u_i, y(t_{i+1}) = u_{i+1}, p(t_i) = p_i, p(t_{i+1}) = p_{i+1} \text{ und } h_i = t_{i+1} - t_i$$

eingesetzt, folgt daraus mit dem CRANK-NICHOLSON-Verfahren

$$m \underbrace{\frac{u_{i+1} - u_i}{h_i}}_{\text{Differenzenquotient}} + s \underbrace{(\Theta u_i + (1 - \Theta) u_{i+1})}_{\text{Gewichtung}} = \underbrace{p_i \Theta - (1 - \Theta) p_{i+1}}_{\text{Gewichtung}} . \quad (4.1.10)$$

Nach etwas Umformarbeit, nach der gesuchten Größe  $u_{i+1}$ , wird daraus

$$(m + h_i(1 - \Theta)s) u_{i+1} = h_i(\Theta p_i + (1 - \Theta) p_{i+1} - \Theta s u_i) + m u_i \quad (4.1.11)$$

Zur Verdeutlichung der unterschiedlichen Einschrittverfahren: je nachdem welcher Wert  $\Theta$  zugewiesen wird, resultiert daraus das unterschiedliche Verfahren, da entweder nur die Anfangswerte (*explizites* EULER-Verfahren) oder die Endwerte (*implizites* EULER-Verfahren) zur Geltung kommen.

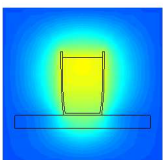
$\Theta = \frac{1}{2}$  : CRANK-NICHOLSON-Verfahren

$\Theta = 0$  : *implizites* EULER-Verfahren

$\Theta = 1$  : *explizites* EULER-Verfahren

Es wird  $\Theta = \frac{1}{2}$  gesetzt, um auf das CRANK-NICHOLSON-Verfahren zu gelangen. Somit sieht die Gleichung wie folgt aus.

$$\left(m + \frac{h_i}{2}s\right) u_{i+1} = \frac{h_i}{2}(p_i + p_{i+1}) + \left(m - \frac{h_i}{2}s\right) u_i \quad (4.1.12)$$



Der skalare Fall soll aber nicht weiter interessieren, da der vektorielle Fall zum Lösen des Anfangswertproblems von Nöten ist. In diesem Fall sind die Faktoren  $m$  und  $s$  Matrizen,  $p_i$  bzw.  $p_{i+1}$  sind Vektoren.

$$\underbrace{\left(\mathbf{M} + \frac{h_i}{2}\mathbf{S}\right)}_{\text{bekannte Matrix}} \underbrace{\underline{u}_{i+1}}_{\text{gesuchter Vektor}} = \underbrace{\frac{h_i}{2}(\underline{p}_i + \underline{p}_{i+1})}_{\text{bekannter Rechtsektor}} + \left(\mathbf{M} - \frac{h_i}{2}\mathbf{S}\right)\underline{u}_i \quad (4.1.13)$$

Dies ist ein bekanntes Gleichungssystem der Form  $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}$  und kann mit dem CHOLESKY-Verfahren gelöst werden.

## 4.2 Cholesky-Zerlegung

Ein lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}$$

kann mittels der CHOLESKY-Zerlegung bestimmt werden, indem die Matrix  $\mathbf{A}$  in das Produkt einer unteren Dreiecksmatrix  $\mathbf{L}$  und ihrer Transponierten  $\mathbf{L}^T$  zerlegt wird. Die Matrix  $\mathbf{A}$  muss dafür symmetrisch positiv definit sein.

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \quad (4.2.1)$$

Das Gleichungssystem hat dann folgende Gestalt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & l_{n1} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & l_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\underline{b}}. \quad (4.2.2)$$

Diese Aufspaltung macht es möglich das lineare Gleichungssystem durch zwei lineare Systeme zu ersetzen, die nicht weiter umgeformt werden müssen, da sie schon in der Dreiecksform vorliegen. Dazu wird ein inneres Gleichungssystem mit

$$\mathbf{L}^T \underline{x} := \underline{y} \quad (4.2.3)$$

definiert, dessen Lösungen ein Vektor ist. Mittels dieses Vektors kann das äußere Gleichungssystem und damit auch das Ausgangsgleichungssystem gelöst werden.

$$\mathbf{L}\underline{y} = \underline{b} \quad (4.2.4)$$

Die sich ergebenden Gleichungssysteme können durch vorwärts einsetzen (Gleichung (4.2.4)) und anschließendes rückwärts einsetzen (Gleichung (4.2.3)) gelöst werden.

Die Matrixeinträge der  $\mathbf{L}$ -Matrix errechnen sich auf folgende Art und Weise.

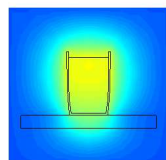
$$l_{jk} = \begin{cases} \sqrt{a_{kk} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km}^2} & j = k \\ \frac{1}{l_{kk}} \left( a_{jk} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{jm} l_{km} \right) & j \neq k \end{cases} \quad (4.2.5)$$

Der Aufwand der CHOLESKY-Zerlegung ist halb so hoch wie der der  $\mathbf{LR}$ -Zerlegung, daher bietet es sich an, die Erstere zu wählen um Zeit und Rechenleistung so gering wie möglich zu halten.

Es sei nochmal bemerkt, dass das CHOLESKY-Verfahren nur für symmetrisch positiv definite Matrizen angewandt werden kann, da die Wurzel aus einer negativen Zahl im Bereich der reellen Zahlen nicht definiert ist.

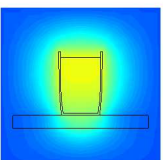
## 4.3 Verwendung zur Lösung des Kaffeetassenproblems

Die Gleichung (4.1.13) kann zwar in dieser Form zum Ergebnis führen, jedoch erleichtern einige Vereinfachungen das Lösen. Es werden nur DIRICHLET- und homogene NEUMANN-Randbedingungen angenommen, die zeitlich invariant sind, was zur Folge hat, dass der Lastvektor nicht von der Zeit



abhängt,  $p_i(t) = p_{i+1}(t) = p_i$ .

Um die Genauigkeit des Temperaturverlaufs zu erhöhen, ist es ratsam die Intervallgrößen  $h$  klein zu halten. Dabei steigt die Genauigkeit mit der Intervalldistanz, je kleiner desto besser. Aber auch dem sind technische und zeitliche Grenzen gesetzt, denn der Rechenaufwand steigt mit jeder Verfeinerung. Die gewählte Schrittweite beläuft sich auf 0,5s.



# Kapitel 5

## Programmierung und Vorgehensweise

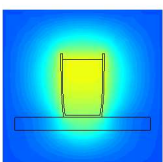
### 5.1 Programmtechnische Umsetzung

Bei der Wahl der Programmiersprache kamen wir schnell zum Entschluss, dass C diese Aufgabenstellung sehr gut lösen würde. C hat den Vorteil der hardwarenahen und schlanken Programmierung und einer weiten Verbreitung, so dass wir jederzeit auf verschiedenste Informationsquellen im Internet zurückgreifen konnten.

Die benötigten C-Programmteile gliedern sich folgendermaßen:

- Einlesen der Knoten-, Element- und Randbedingungsdatei wie sie vom Netzgenerator zur Verfügung gestellt werden
- Aufbau der Systemmassen- und Systemsteifigkeitsmatrizen und des Systemlastvektors
- Aufstellen des Gesamtgleichungssystems für jeden Zeitschritt mit Hilfe des CRANK-NICHOLSON-Verfahrens
- Lösen des Gleichungssystem für jeden Zeitschritt mittels CHOLESKY-Zerlegung
- Ausgabe der berechneten Knotentemperaturen für jeden Zeitschritt

Zur Visualisierung war Matlab die Umgebung unserer Wahl. In mehreren Matlab-Scripten entsteht so ein Zeitraffer eines 180 minütigen Abkühlvorgangs, welches sich auf der CD befindet, zudem erzeugen wir dort auch das Daumenkino, welches in der Fußzeile zu finden ist und viele weitere Grafiken die sich in diesem Bericht wiederfinden.



Das Programm besteht aus mehreren Funktionen die sich modulartig in verschiedenen Dateien befinden. Die Modularisierung geschah weitestgehend wie in den oben bereits genannten Anforderungspunkten.

Im folgenden sollen die einzelnen C-Dateien genauer beschrieben werden.

**waerme\_gls.c** Dies ist die Hauptdatei unseres Programms, hier stehen die Präprozessoranweisungen und es werden Konstanten sowie Vektoren und Matrizen deklariert. Das gesamte Programm läuft in der `main()`-Funktion die wiederum alle anderen benötigten Funktionen aufruft.

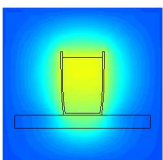
**io\_mat.c** In dieser Datei stehen alle Routinen die man benötigt um die vom Netzgenerator erzeugten Dateien einzulesen. Ausserdem befindet sich hier noch Routinen um die berechneten Temperaturvektoren in eine Ausgabedatei zu schreiben.

**sm.c** Diese Datei beinhaltet die Routinen zum füllen der Systemmassen- und Systemsteifigkeitsmatrix.

**rand.c** Hier wird der Systemlastvektor generiert, ausserdem werden die Randbedingungen eingebaut, in unserem Fall handelt es sich dabei nur um die DIRICHLET-Randbedingungen, denn die homogenen NEUMANN-Randbedingungen werden durch Nichtstun schon erzeugt und weitere Randbedingungen treten in unserem Modell nicht auf.

**create\_gls.c** Das zu lösende Gleichungssystem wird hier erzeugt, diese Funktion beinhaltet die Zeitdiskretisierung mit Hilfe des CRANK-NICHOLSON-Verfahrens. Sie macht aus unserem Differentialgleichungssystem der Form  $\mathbf{M}\dot{\underline{u}} + \mathbf{S}\underline{u} = \underline{p}$  ein lineares Gleichungssystem der Form  $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}$ .

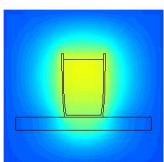
**cholesky.c** Die enthaltenen Funktionen dienen zum Lösen unseres Gleichungssystem und bestehen aus einer CHOLESKY-Zerlegung, einer Matrixtransposition und einer Vorwärts- sowie Rückwärtsauflösungs-Routine. Das Augenmerk liegt auf der CHOLESKY-Zerlegung, sie nimmt mit Abstand den größten Teil der Rechenzeit ein, die Anzahl der Rechenoperationen wächst quadratisch mit der Anzahl der Knotenpunkte.



## 5.2 Nassi-Shneider-Diagramme

waerme\_gls — Das C-Programm

Variablen deklarieren	
maximale Feldgrößen definieren (max. Anzahl Knoten)	
<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <span>Modellname, Laufzeit, Schrittweite und <math>\Theta</math> wurden beim Aufruf des Programmes angegeben</span> </div>	
Ja	Nein
Anzeige der gewählten Parameter	Aufforderung zur Eingabe und Erklärung der Kommandozeilen-Parameter, die beim Start des Programmes direkt mit eingeben werden müssen
Bestimmung der Anzahl der Schritte	
Einlesen der Elemente-, Knoten- und Randbedingungsdateien	
Systemsteifigkeits- und Systemmassenmatrix füllen	
Lastvektor aufbauen	
Randbedingungen in Gleichungssystem einbauen	
Knotenkoordinaten und Anfangstemperaturen in Ausgabedatei schreiben	
Schleife über Schritte	
Gleichungssystem nach CRANK-NICHOLSON aufbauen	
CHOLESKY-Zerlegung der Matrix	
Durch vorwärts und rückwärts einsetzen Lösungsvektor bestimmen	
Berechneten Temperaturvektor in Ausgabedatei schreiben	
Benötigte Rechenzeit anzeigen	



**sm.c** — Systemsteifigkeits- und Systemmassenmatrix füllen

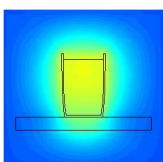
Systemsteifigkeits- und Systemmassenmatrix als NxN deklarieren und Null setzen
Schleife über Elemente
die drei Knotenkoordinaten des Dreieckselementes bestimmen
Jakobideterminante des aktuellen Elementes berechnen
Elementsteifigkeits- und Elementmassenmatrix berechnen
Elementsteifigkeits- und Elementmassenmatrix mit Hilfe der Indextafeln zu Gesamtmatrizen hinzuaddieren

**rand.c** — Lastvektor erzeugen und DIRICHLET-Randbedingungen einbauen

N-Dimensionalen Vektor deklarieren und Null setzen
Schleife über alle Randbedingungen
die beiden zu den Knoten gehörenden Steifigkeitsmatrix-Spaltenvektoren vom Lastvektor abziehen
Zeilen und Spalten der Steifigkeits- und Massenmatrix Null setzen
Diagonaleinträge der Steifigkeits- und Massenmatrix 1 setzen
Lastvektor an den beiden zu den Knoten gehörenden Stellen gleich DIRICHLET-Knotentemperaturen setzen

**create\_gls.c** — Gleichungssystem nach CRANK-NICHOLSON aufbauen

Schleife über Zeilen des Gleichungssystem
Schleife über Spalten des Gleichungssystem
Gesamtmatrizeintrag nach 4.1.13 berechnen
Gesamtvektor mittels Vektormultiplikation der aktuellen Knotentemperaturen mit Steifigkeits- und Massenmatrix nach 4.1.13 berechnen



## 5.3 Vorgehensweise

### 5.3.1 Der Netzgenerator

Unsere Kaffeetasse und der Raum in dem sie sich befindet müssen zunächst digitalisiert werden. Das geschieht im PPM-Netzgenerator. Es ist lediglich notwendig eine Seite des rotationssymmetrischen Körpers in der  $(x, y)$ -Ebene zu modellieren, die Transformation in einen dreidimensionalen Körper übernimmt später das C-Programm.

Hier haben wir eine Kaffeetasse der Höhe 10cm mit einem unteren Durchmesser von 6cm und einem oberen Durchmesser von 7,5cm modelliert. Die Wandstärke beträgt in etwa 4mm. In Abbildung 5.1 sind sowohl die reale Tasse als auch die modellierte Tasse in der PPM-Netzgenerator-Umgebung zu sehen. Sie steht auf einem runden Tisch mit einem Durchmesser von 22cm. Der modellierte Raum ist 25cm hoch und hat einen Durchmesser von 26cm. Anschließend wird das Modell trianguliert wie

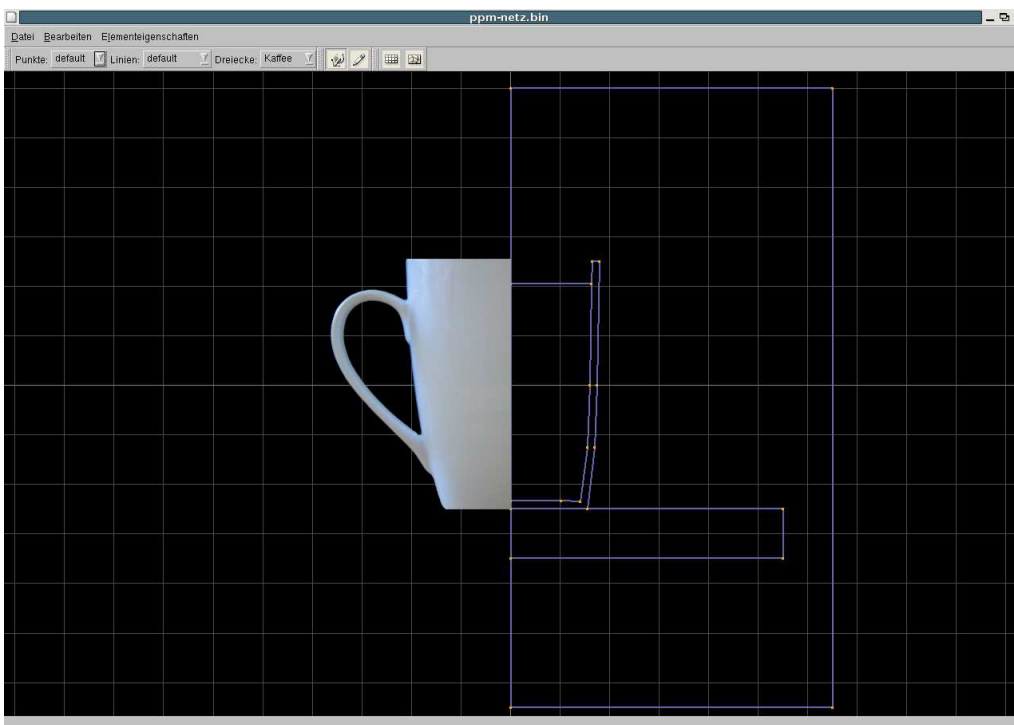


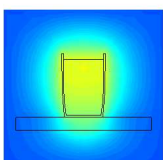
Abbildung 5.1: reale Kaffeetasse und Kaffeetassenmodell im Netzgenerator (Raster: 2cm)

in Abbildung 5.2 zu sehen. Es entstehen zusätzliche Knoten, Linien zwischen Knoten und Elemente die jeweils aus 3 Knoten bestehen.

Durch geeignete Verfeinerungen, die durch größere Dreieckswinkel und kleinere Dreiecksflächen als Triangulierungsparameter vorgegeben werden können, wird die spätere Simulation an wichtigen Stellen wesentlich präziser. So ist etwa der Bereich des Tassenrandes sehr fein trianguliert, während z.B. die rechte obere und untere Ecke am äusseren Rand mit sehr großen Dreiecken ausgefüllt wurde. Gerade an Unstetigkeitsstellen die durch Übergänge zwischen unterschiedlichen Materialparametern, entstehen ist es von entscheidender Bedeutung die Triangulierung geeignet zu wählen. Durch eine gezielte und nicht globale Verfeinerung ist es möglich, wertvolle Rechenzeit zu sparen. Die Materialeigenschaften, Randbedingungen und Anfangstemperaturen werden bereits im PPM-Netzgenerator den Knoten, Linien und Elementen zugewiesen.

Die Anfangstemperaturen sind knotenbezogen. Wir unterscheiden in unserem Modell nur in warm ( $70^{\circ}\text{C}$ ) und kalt ( $20^{\circ}\text{C}$ ).

Warm ist ausschließlich der Kaffee, alle anderen Punkte starten bei einer Umgebungstemperatur von  $20^{\circ}\text{C}$ . Materialeigenschaften sind elementbezogen und beinhalten die Wärmeleitfähigkeiten, Dichten und Wärmekapazitäten. Die gewählten Parameter sind in der Tabelle 5.1 aufgeführt.



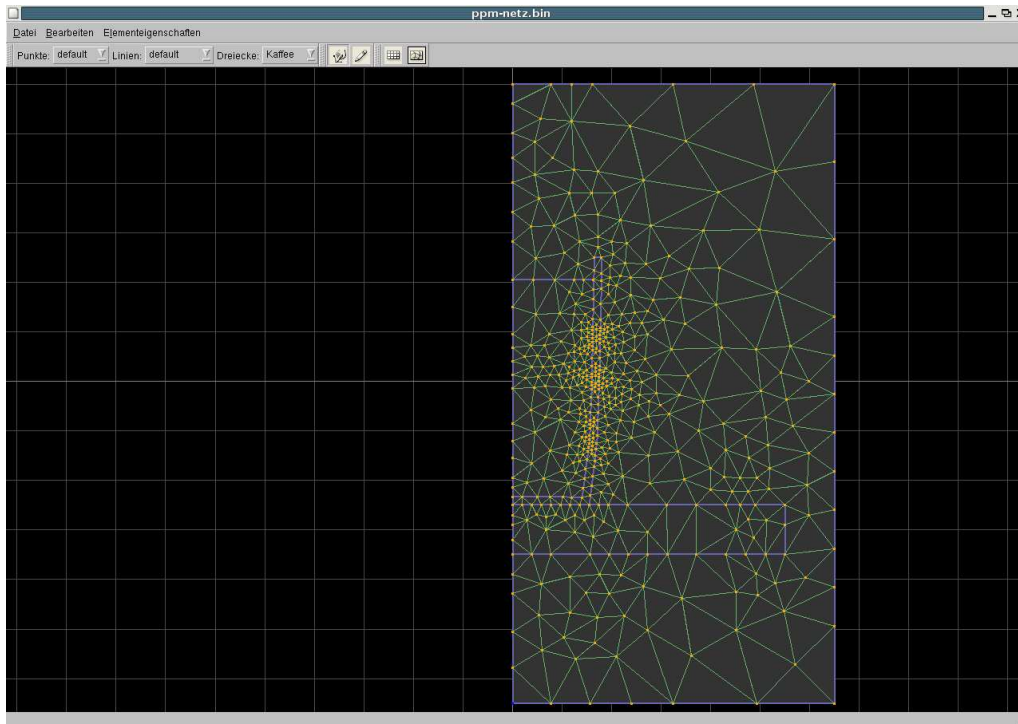


Abbildung 5.2: trianguliertes Kaffeetassenmodell im Netzgenerator

Material	Wärmeleitfähigkeit $\lambda$ $\left[\frac{W}{mK}\right]$	Dichte $\rho$ $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	Wärmekapazität $c$ $\left[\frac{J}{kgK}\right]$
Kaffee (Wasser)	0,6	1000	4183
Luft	0,024	1,204	1005
Porzellan	1,0	2400	730
Holz (Eiche)	0,15	860	1700

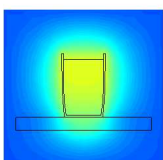
Tabelle 5.1: Materialeigenschaften der Kaffeetasse

Die Randbedingungen werden immer zwischen zwei Dreiecksknoten definiert. In unserem Modell benötigen wir lediglich homogene NEUMANN-Randbedingungen und DIRICHLET-Randbedingungen. Die homogenen NEUMANN-Randbedingungen befinden sich an der Rotationsachse und sind in der Abbildung 5.3 grün dargestellt. Sie simulieren eine perfekte Isolierung und verhindern ein "Entweichen" der Wärme an der Rotationsachse.

Die DIRICHLET-Randbedingungen stellen den unendlich großen Raum dar, unsere Kaffeetasse wird die Temperatur eines durchschnittlichen Zimmers nicht wesentlich erhöhen, deswegen setzen wir den äusseren Rand des Modells (in der Abbildung gelb dargestellt) auf eine feste Temperatur von 20°C.

Alle gewählten Eigenschaften sind in den Abbildungen 5.3 und 5.4 nochmals grafisch dargestellt. Sowohl die Knotentemperaturen als auch die Elementeigenschaften und Randbedingungen sind dort zu erkennen.

Das fertige Netz kann nun exportiert und mit unserem C-Programm weiterverarbeitet werden.



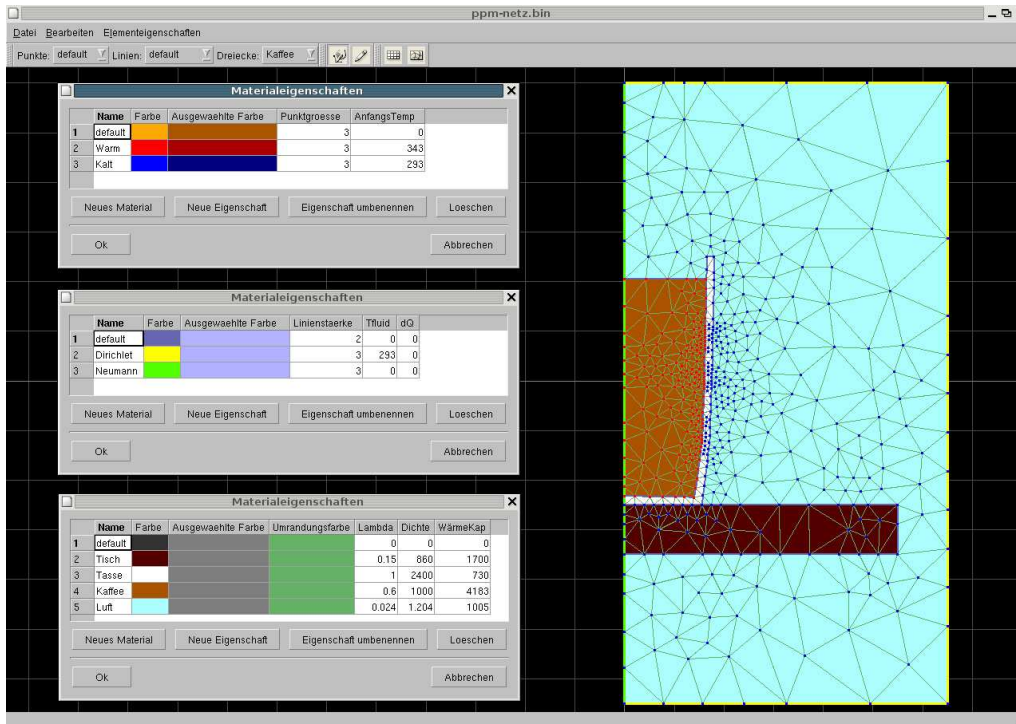


Abbildung 5.3: Eigenschaften des Kaffeetassenmodells

### 5.3.2 Das C-Programm

Das Programm erwartet als Eingangsdateien die `*.knt`, `*.ele` und `*.rbd` Dateien des PPM-Netzgenerators. Als zusätzliche Parameter müssen die simulierte Laufzeit und die Zeitschrittweite sowie der Gewichtungsfaktor  $\Theta$  gewählt werden. Die Parameter werden beim Programmaufruf übergeben und werden beim Aufruf des Programmes ohne Parameter näher erläutert.

Ein Beispielhafter Aufruf würde folgendermaßen aussehen:

```
waerme_gls kaffeetasse 3600 0.1 0.5
```

Dies würde eine Simulation des Kaffeetassenmodells mit einer Dauer von 3600 Sekunden, einer Schrittweite von 0,1 Sekunde und einem  $\Theta$  von 0,5 starten. Unseren Abkühlvorgang der Kaffeetasse simulierten wir 3 Stunden mit einer Zeitschrittweite von 0,5 Sekunden,  $\Theta$  wählten wir zu 0,5 womit sich das CRANK-NICHOLSON-Verfahren ergibt.

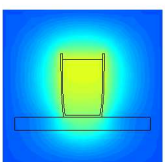
Das Programm erzeugt eine `*.out` Datei die den gleichen Namen wie das Eingangsmodell trägt. In dieser Datei stehen die Koordinaten der Knotenpunkte und für jeden Zeitschritt die berechneten Knotentemperaturen. Dies ist quasi das Ergebnis der numerischen Berechnung, allerdings bedarf es noch einer Visualisierung der Daten.

### 5.3.3 Das Matlab-Script

Zunächst erzeugen wir in Matlab einen Film aus allen Einzelbildern jedes Zeitschrittes, generiert aus den Knotentemperaturen der Ergebnisdatei des C-Programms. Wir benötigen dazu einige Unterrouтины die unter anderem die Knotentemperaturen spiegeln, da wir nur die rechte Seite modelliert haben und auch nur die Temperaturen der rechten Seite aus dem C-Programm erhalten.

Da wir nur die Temperaturen an den Knotenpunkten kennen, muss zwischen diesen interpoliert werden. Auf diese Weise erhält man einen Temperaturteppich, wie er in den Abbildungen 5.6 und 5.8 zu sehen ist.

Um die Schnittansicht auf der rechten Seite der Abbildungen zu erhalten, mussten die Temperaturen auf der  $x$ -Achse um die  $y$ -Achse rotiert werden. Der Schnitt befindet sich in der Höhe des



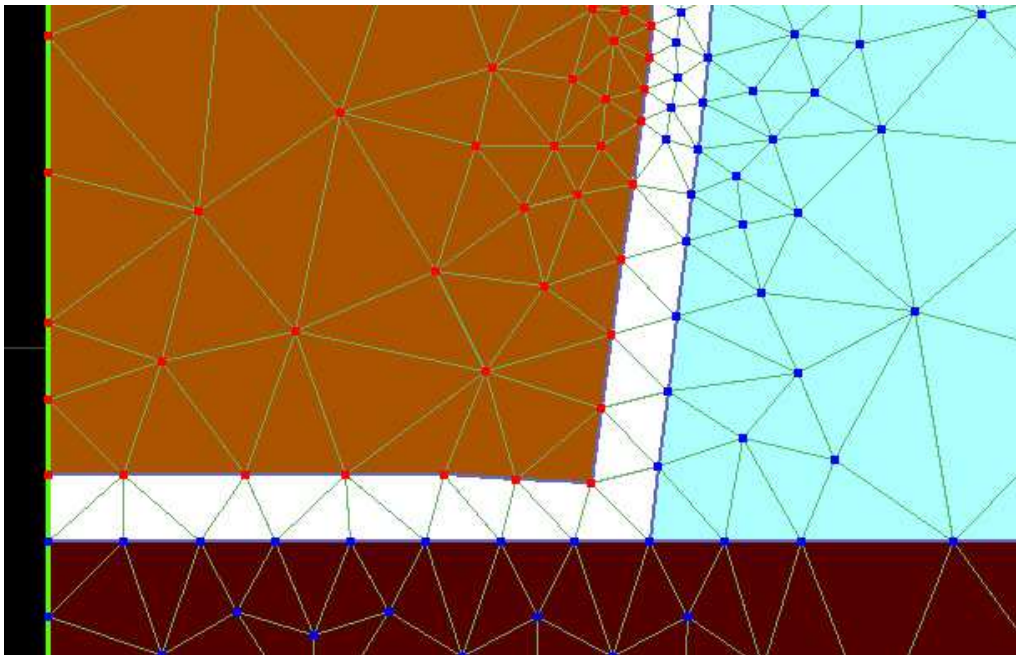
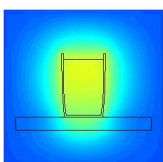


Abbildung 5.4: detaillierte Darstellung der Triangulierung

Koordinatenursprunges.

Außerdem werden aus den unterschiedlichen Materialeigenschaften Polygonzüge erzeugt, die die Umrisse des Modells ohne Triangulierung im Wärmebild darstellen.

Des Weiteren wird in Matlab auch das Daumenkino erzeugt, welches sich hier in diesem Bericht in der Fußzeile befindet. Hier konnten viele oben bereits erwähnte Funktionen wiederverwendet werden. Das Daumenkino sowie der Film zeigen die Abkühlung einer Kaffeetasse mit 70°C warmen Kaffee innerhalb von 3 Stunden.



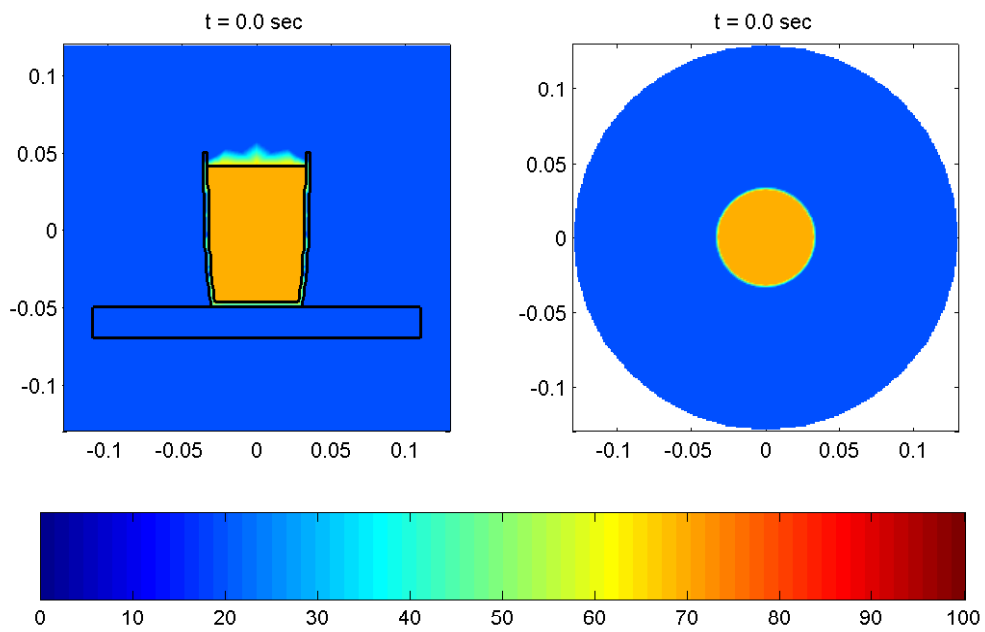


Abbildung 5.5: Wärmebild der Kaffeetasse zu Beginn der Simulation

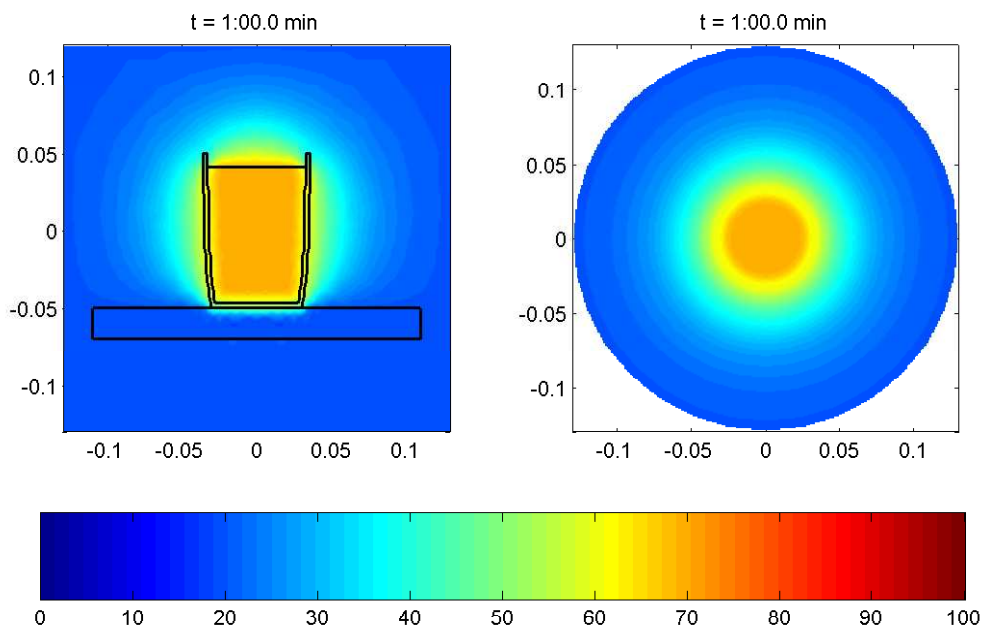
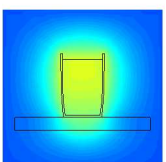


Abbildung 5.6: Wärmebild der Kaffeetasse nach einer Minute



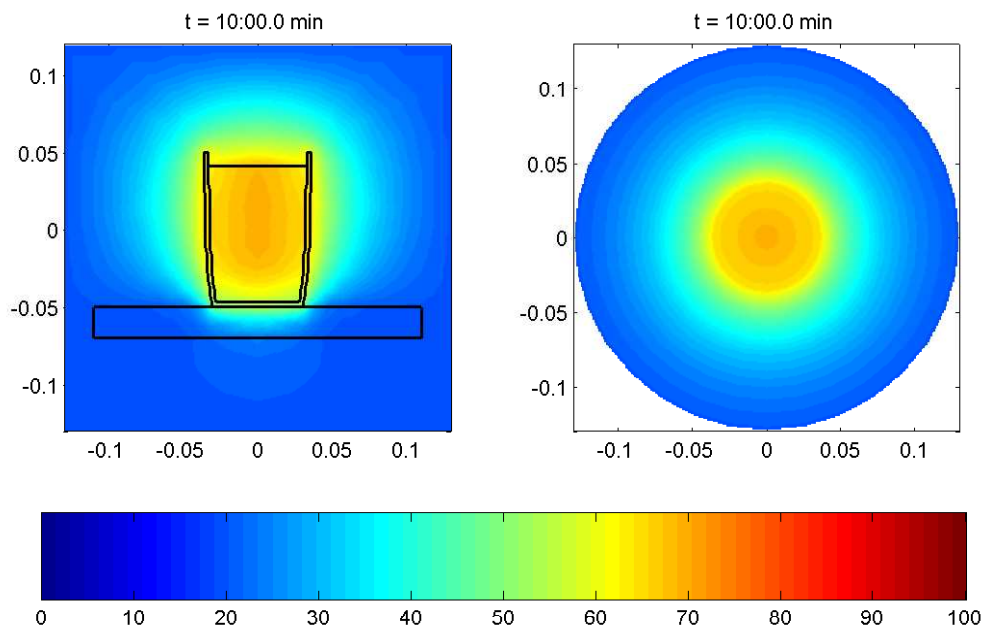


Abbildung 5.7: Wärmebild der Kaffeetasse nach zehn Minuten

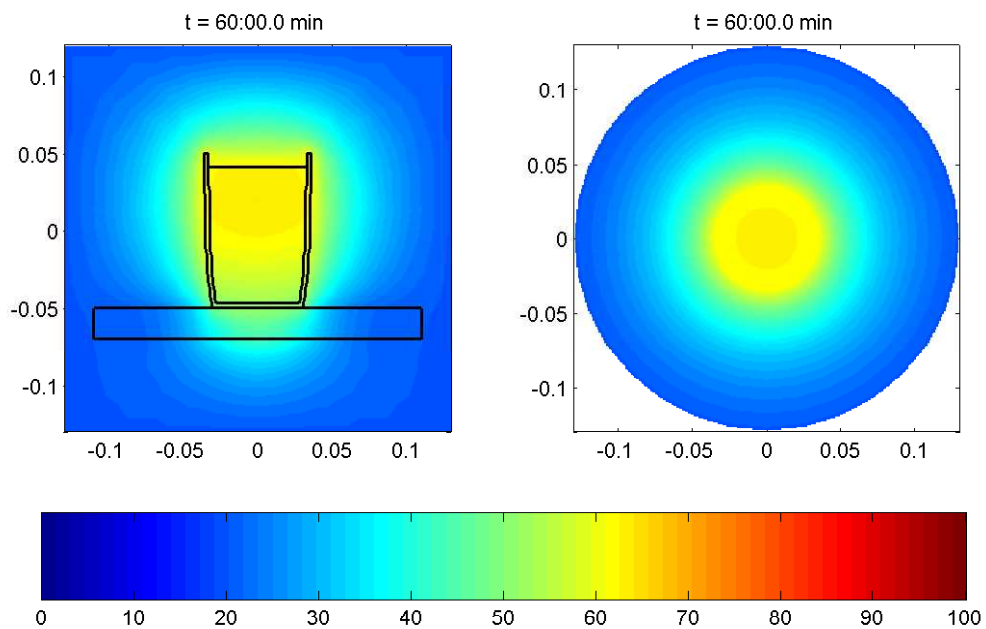
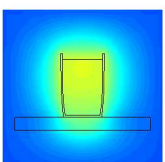


Abbildung 5.8: Wärmebild der Kaffeetasse nach einer Stunde



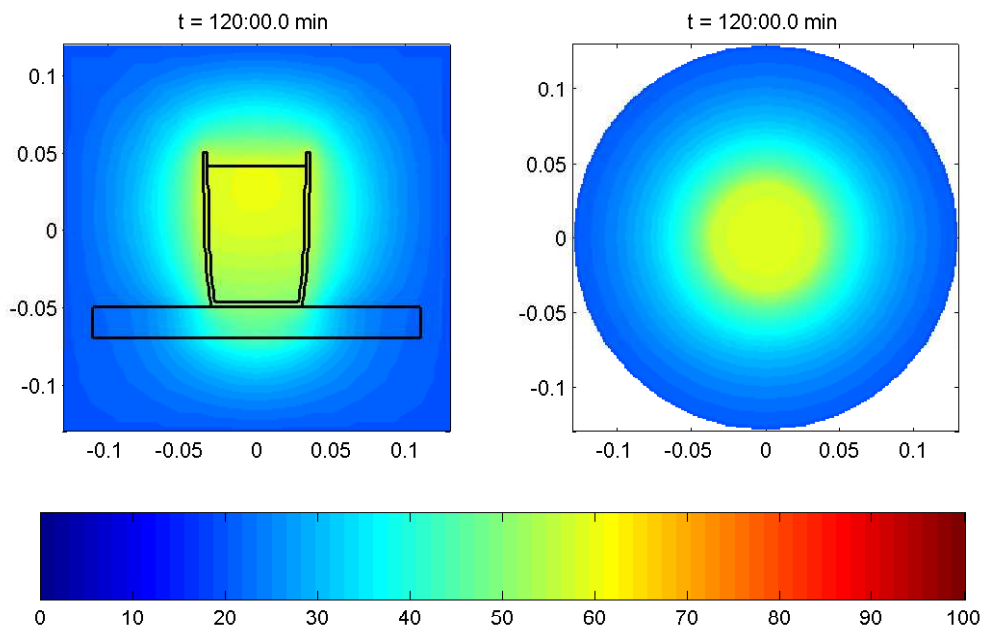


Abbildung 5.9: Wärmebild der Kaffeetasse nach zwei Stunden

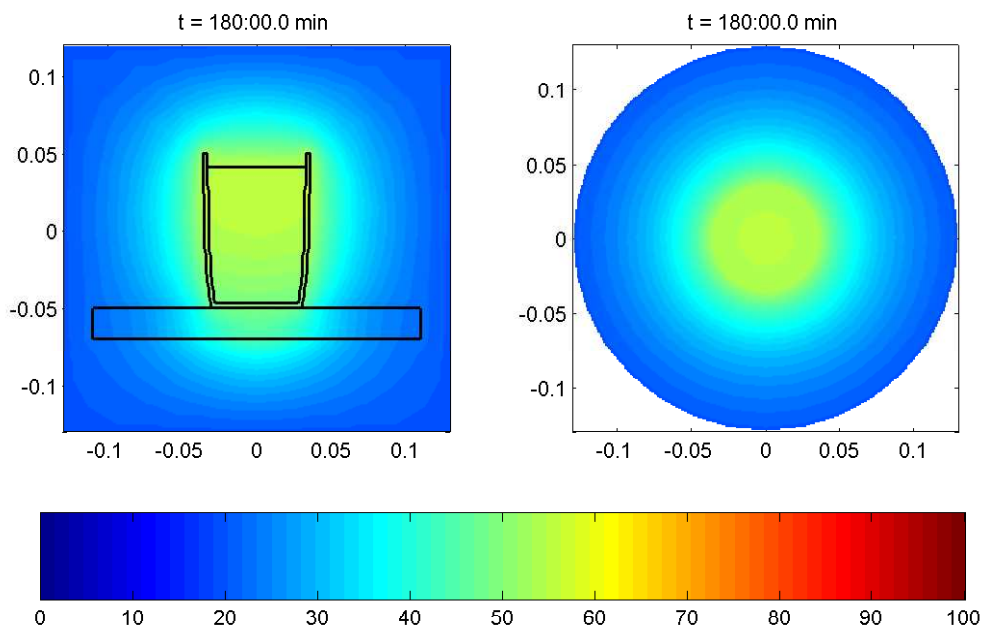
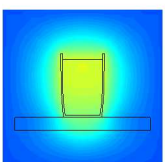


Abbildung 5.10: Wärmebild der Kaffeetasse nach drei Stunden



# Kapitel 6

## Parameteranalyse

### 6.1 Ein einfacher Test

Um die grundsätzliche Funktionstüchtigkeit unseres FEM-Programms zu überprüfen, wollen wir es zunächst an einem einfachen Beispiel testen. Dazu konstruieren wir das in der Abbildung 6.1

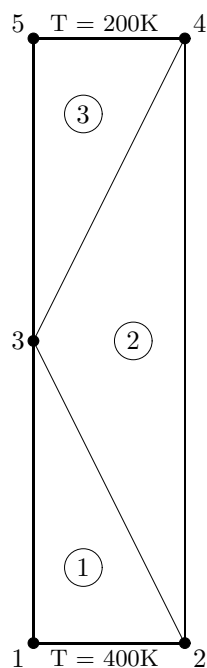
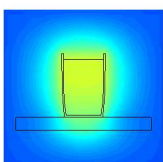


Abbildung 6.1: Gitternetz einer Stabquerschnittshälfte

nicht maßstabsgetreu dargestellte Dreiecksnetz. Das Netz besteht nur aus drei Dreiecken und fünf Knoten. Das Verhältnis von Breite zu Höhe beträgt 1:10. Wir belegen alle Knoten mit der Anfangstemperatur von 290 Kelvin. An dem unteren Rand, zwischen den Knoten 1 und 2, setzen wir eine DIRICHLET-Randbedingung mit der festen Temperatur 400K und an dem oberen Rand, zwischen den Knoten 4 und 5 setzen, wir eine ebenfalls konstante Temperatur von 200K. Der Knoten mit der Nr. 3 befindet sich genau in der Mitte zwischen den beiden Rändern mit konstanter Temperatur. Nach längerer Zeit müsste sich an diesem Knoten die Temperatur 300K einstellen. In Abbildung 6.2 sehen wir das Ergebnis. Die Knotentemperatur nähert sich exponentiell dem Mittelwert zwischen den Randtemperaturen.



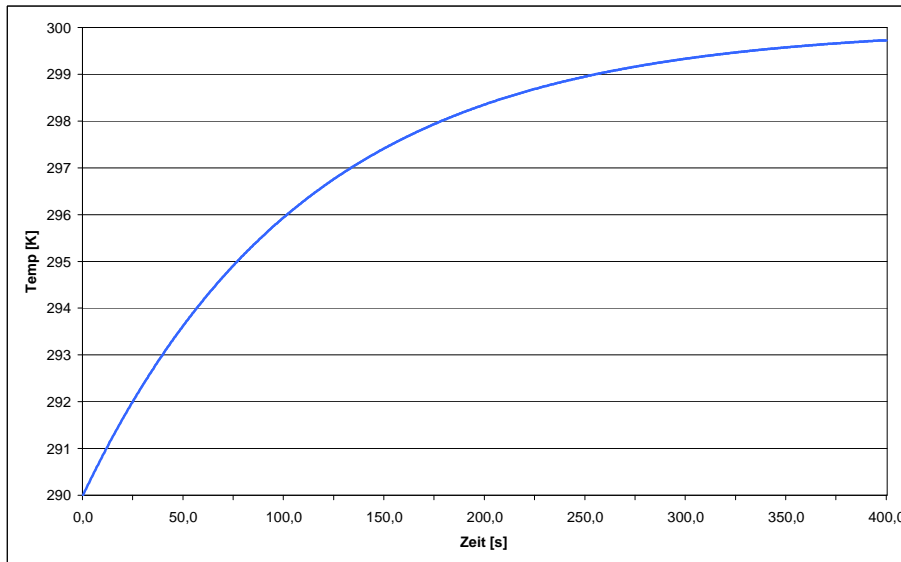


Abbildung 6.2: Temperaturverlauf am Knoten 3

## 6.2 Vergleich mit Experiment

Um zu überprüfen ob unser errechneter Temperaturabfall an der Kaffeetasse auch mit der Realität übereinstimmt, haben wir dazu ein Experiment durchgeführt. Mit einem Bratthermometer, das in einem Temperaturbereich von 0 bis 120°C messen kann, haben wir den Temperaturabfall in einer mit kochendem Wasser gefüllten Keramiktasse in Abständen von 1 bis 5 Minuten über einen Zeitraum von einer Stunde gemessen.

Außerdem haben wir in einer Simulation, mit den Materialparametern aus Tab. 5.1, die Temperatur an einem Knoten innerhalb der Kaffeetasse ermittelt. Die zweidimensionale Ausgabe dieser Rechnung ist auch am unteren Bildrand in Form des Daumenkinos zu betrachten. Diese beiden Ergebnisse sind in Abbildung 6.3 dargestellt. Innerhalb der ersten 2 Minuten nimmt die Tempe-

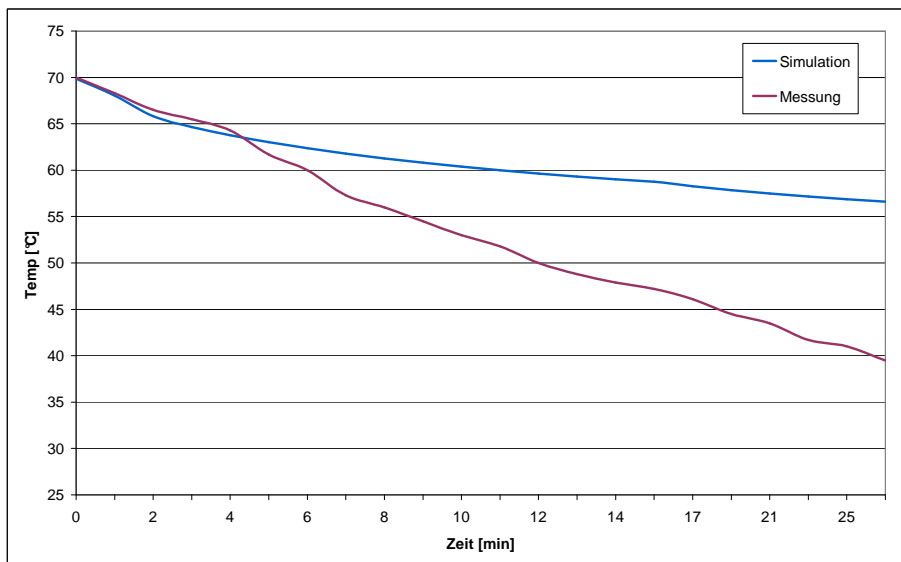
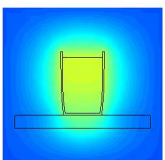


Abbildung 6.3: Vergleich von Simulation und Experiment

ratur etwas stärker ab, da die Differenz zwischen Wassertemperatur und Tassentemperatur bzw. Umgebungstemperatur hier am größten ist. Je größer die Temperaturdifferenz zwischen den Me-



dien ist, um so schneller sinkt die Temperatur im wärmeren Medium. Der dabei zu erwartende exponentielle Kurvenverlauf ist allerdings in beiden Kurven kaum zu erkennen. Die Temperatur der Messung sinkt im weiteren Verlauf schneller als die der Rechnung. Dies war aufgrund der getroffenen Vernachlässigungen auch zu erwarten. Bei der Rechnung werden Wärmeverluste durch Wärmestrahlung und Wärmekonvektion nicht berücksichtigt.

### 6.3 Einfluss der Materialparameter

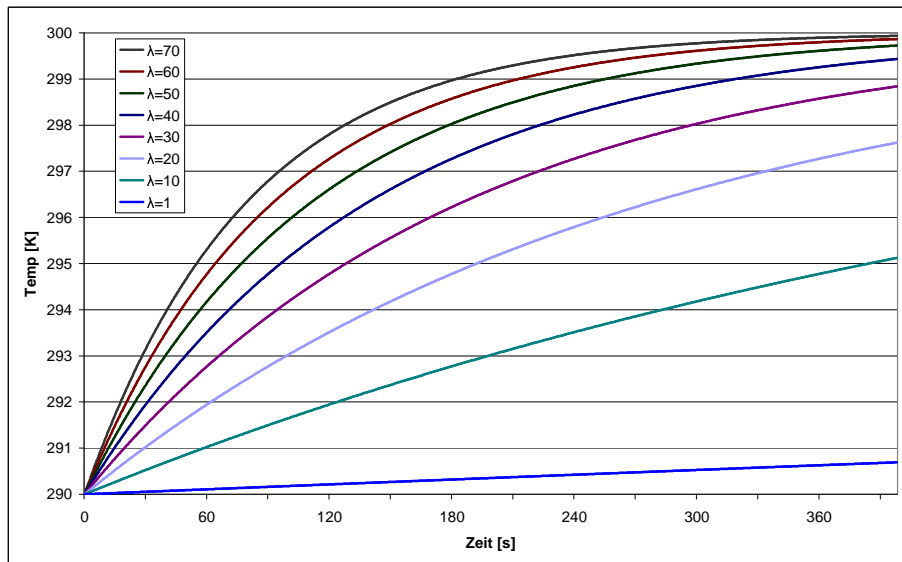


Abbildung 6.4: Temperaturanstieg über die Zeit bei unterschiedlichen  $\lambda$

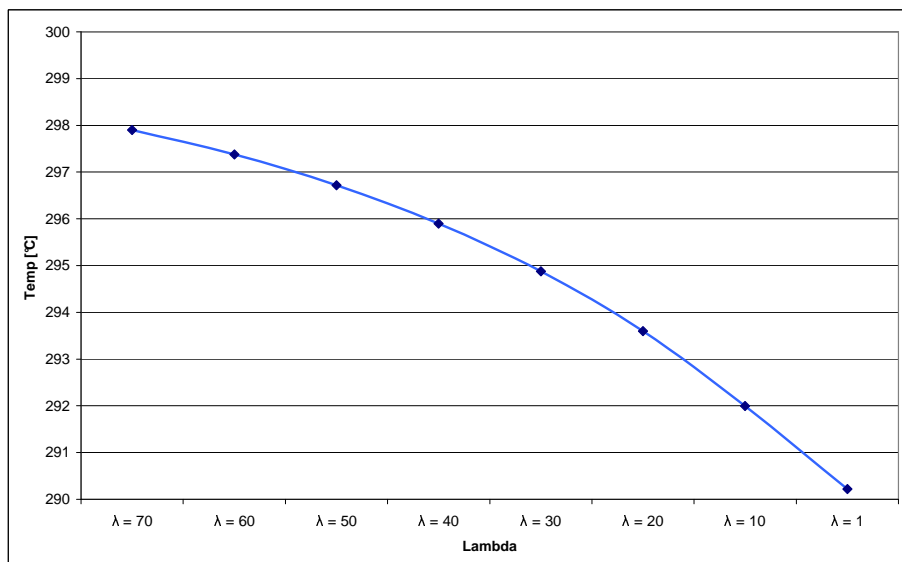
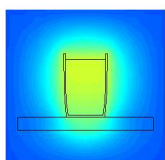


Abbildung 6.5: Temperaturen bei unterschiedlichen  $\lambda$  zum Zeitpunkt  $t=120s$

Im folgenden soll der Einfluss der drei Materialparameter Wärmeleitfähigkeit, Dichte und Wärmekapazität untersucht werden. Dazu haben wir mehrere Programmdurchläufe gestartet und dabei jeweils das Zeit-Temperaturverhalten untersucht. Zuerst an dem einfachen Beispiel aus Abschnitt 6.1. Dabei haben wir wieder den Temperatur-



anstieg am mittleren Knoten betrachtet und jeweils einen Stoffparameter variiert. Zuerst für die Wärmeleitzahl  $\lambda$ . Die Kurvenverläufe für unterschiedliche  $\lambda$  über die Zeit sind in Abbildung 6.4 dargestellt. Außerdem sind in Abbildung 6.5 die Temperaturen zu einem Zeitpunkt  $t = 120s$  bei unterschiedlichen  $\lambda$  dargestellt.

Mit steigendem  $\lambda$  beschleunigt sich der Temperaturanstieg. Dies entspricht auch unserer Erwartung aus dem FOURIERSchen Gesetz (2.1.1):  $\dot{q} = -\lambda \text{ grad}(T)$ . Bei größerem  $\lambda$  erhöht sich auch die Wärmestromdichte  $\dot{q}$ . Es wird mehr Wärme pro Zeit transportiert und die Temperatur nähert sich schneller dem Mittelwert zwischen den Rändern.

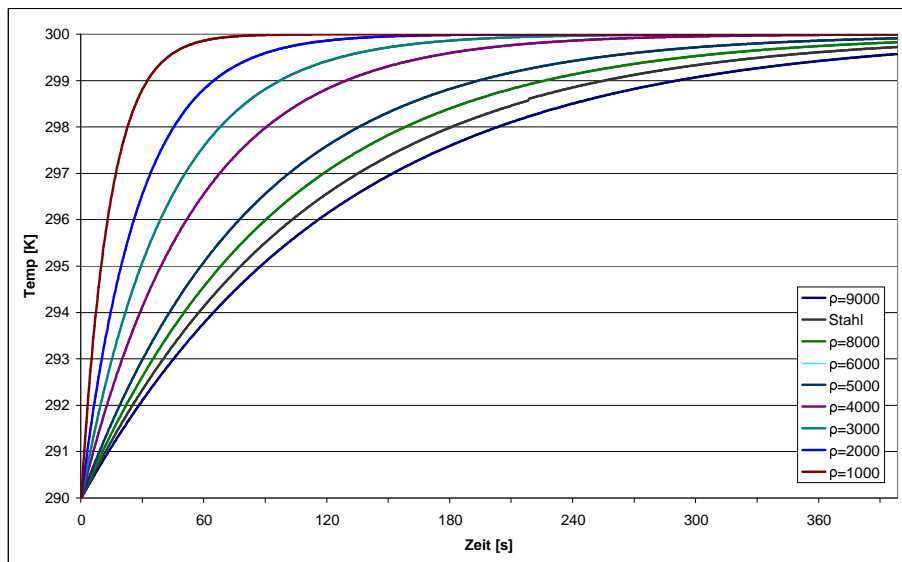


Abbildung 6.6: Temperaturanstieg über die Zeit bei unterschiedlichen Dichten

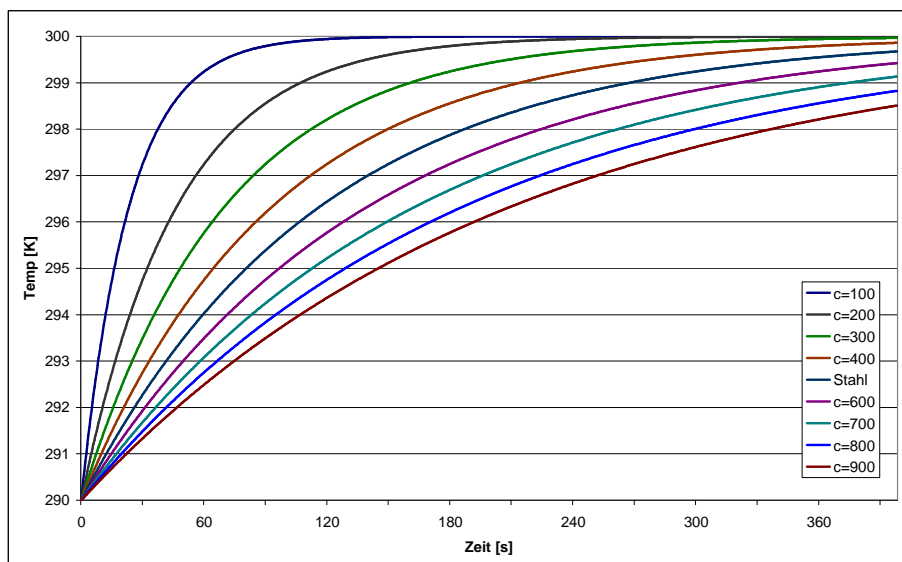
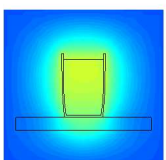


Abbildung 6.7: Temperaturanstieg über die Zeit bei unterschiedlichen Wärmekapazitäten



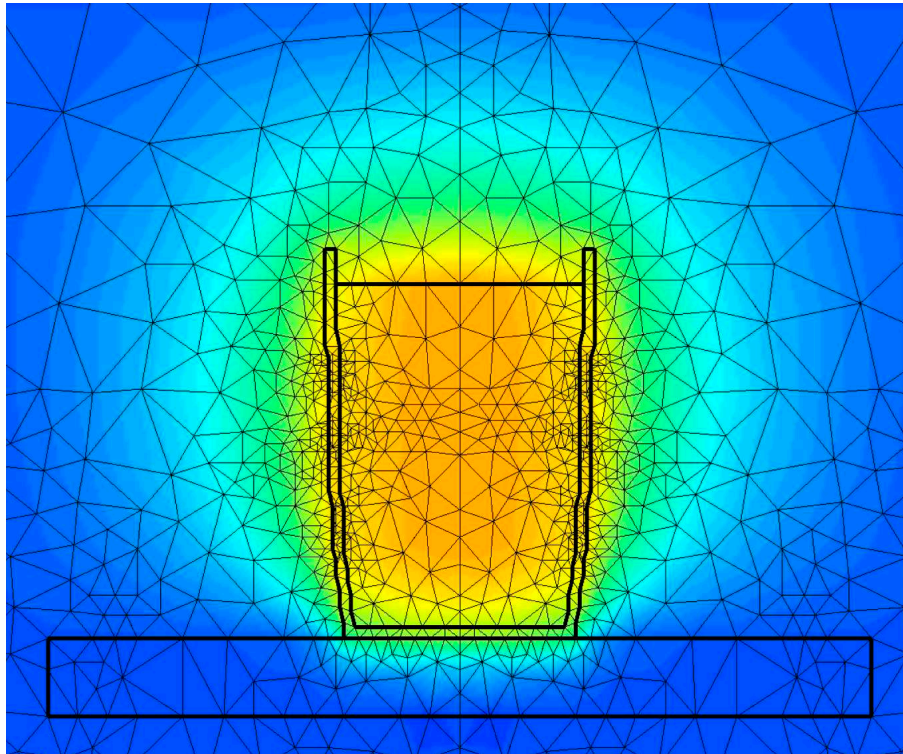


Abbildung 6.8: Wärmebild des Kaffeetassenmodells

## 6.4 Parametervariation am System Kaffeetasse

Da sich der Temperaturgradient in Richtung des Maximums, dem Mittelwert, verringert ergibt sich in Abhängigkeit von  $\lambda$  der exponentielle Verlauf. Ist  $\lambda = 1$  so ergibt sich für den Temperaturanstieg eine Gerade. Eine höhere Wärmeleitfähigkeit erhöht die Wärmeleitfähigkeit des Materials.

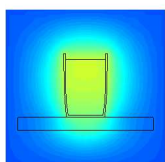
Um nun auch das Einflussverhalten der Dichte und der Wärmekapazität zu untersuchen betrachten wir erneut die bereits in Abschnitt: 2.1 hergeleitete Wärmeleitungsgleichung 2.1.5. Dabei wollen wir den Einfluss durch innere Wärmequellen  $\dot{q}_E$  ausser Acht lassen und erhalten im eindimensionalen Fall:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (6.4.1)$$

Alle in dieser Gleichung vorkommenden Stoffeigenschaften lassen sich zu einer als Temperaturleitfähigkeit

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (6.4.2)$$

bezeichneten Stoffeigenschaft zusammenfassen. Wir hatten bereits festgestellt, dass eine höhere Wärmeleitfähigkeit die Temperaturleitfähigkeit erhöht. Einer Erhöhung der Dichte  $\rho$  und der Wärmekapazität  $c$  sollte demzufolge in ähnlicher Weise zu einer Absenkung der Temperaturleitfähigkeit führen. Das unser Programm diesem Gesetz folgt, ist für die Dichte in Abbildung 6.6 und für die Wärmekapazität in Abbildung 6.7 gut zu erkennen. Wir wollen jetzt noch untersuchen, ob sich unser Programm auch in der eigentlichen Simulation des Kaffeetassenmodells entsprechend unseren Erwartungen verhält. Das resultierende Wärmebild ist in Abbildung 6.8 dargestellt. Wir haben einen Knoten innerhalb der Tasse herausgegriffen und den Temperaturverlauf über die Zeit bei verschiedenen Werten von  $\lambda$  der Tasse dargestellt. Die in Abbildung 6.9 dargestellten Temperaturverläufe sind weniger einfach zu interpretieren als in dem oben diskutierten einfachen Stabbeispiel. Zu Beginn der Rechnung besitzt die Tasse Raumtemperatur. Die Temperatur steigt danach durch den heissen Kaffee sehr schnell an. Das Material mit der größten Wärmeleitfähigkeit,  $\lambda = 2200$  erwärmt sich am schnellsten und erreicht eine höhere Maximaltemperatur als die Materialien mit geringerer Wärmeleitfähigkeit.



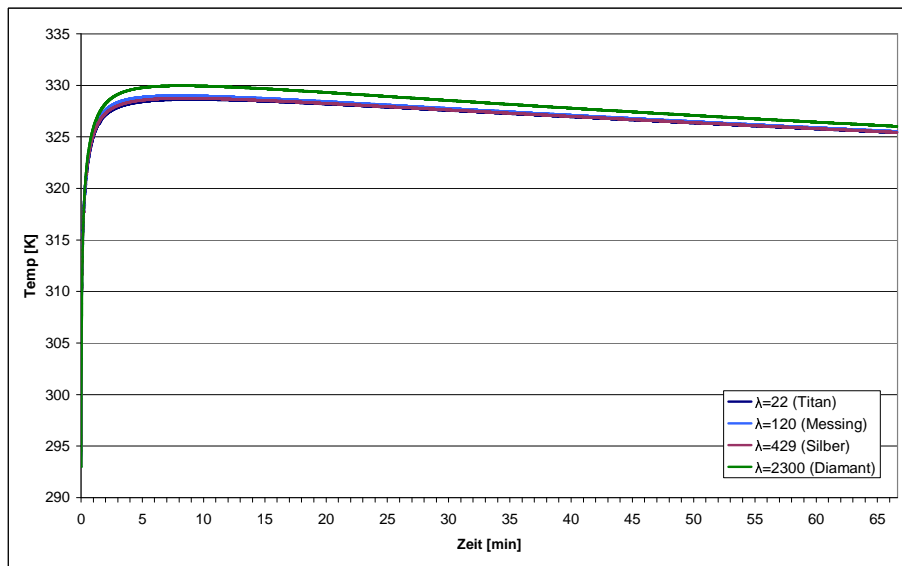


Abbildung 6.9: Temperaturverlauf bei verschiedenen Wärmeleitahlen des Tassenmaterialies

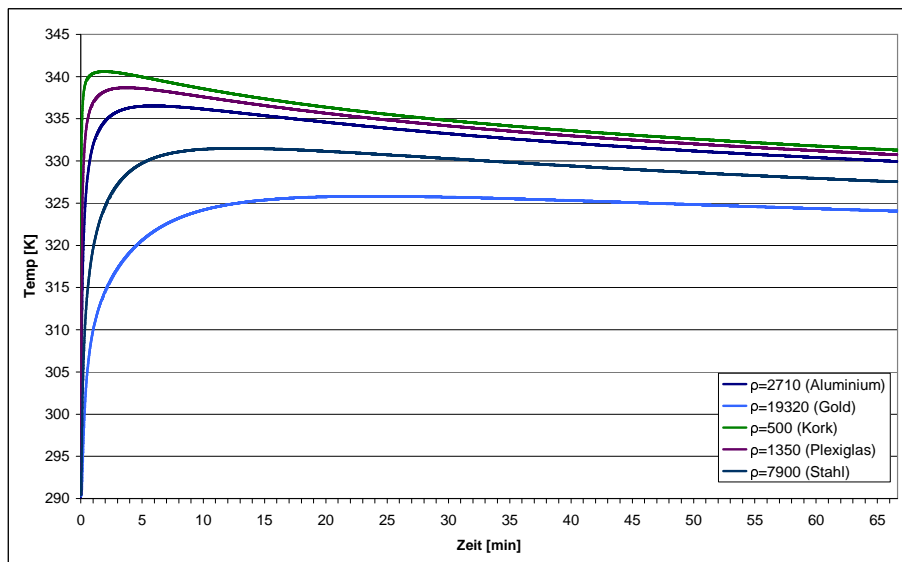
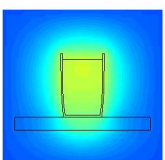


Abbildung 6.10: Temperaturverlauf bei unterschiedlichen Dichten des Tassenmaterialies



Da sich das Wasser im Inneren der Tasse durch Wärmeabgabe an die Umgebungsluft bereits wieder abgekühlt hat, erreichen diese Stoffe die Maximaltemperatur erst gar nicht. Dafür kühlt die Titantasse mit sehr geringer Wärmeleitzahl im weiteren Verlauf etwas langsamer ab als eine aus Diamant.

Die Stoffangaben beziehen sich hier allerdings nur auf den untersuchten Faktor Wärmeleitzahl. Die anderen Materialparameter werden konstant gehalten, um den direkten Zusammenhang darstellen zu können.

Für die in Abbildung 6.10 dargestellten Temperaturverläufe gelten die selben Aussagen. Auch hier

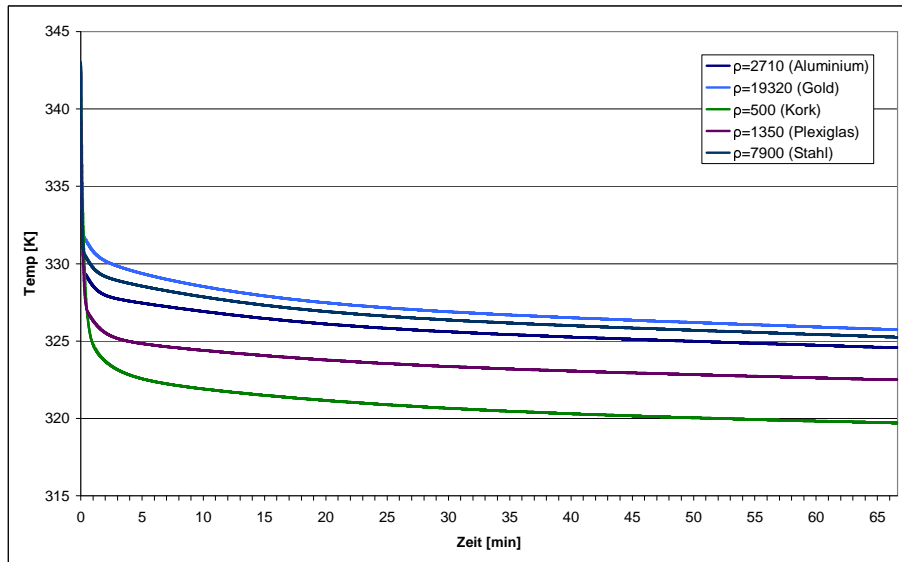


Abbildung 6.11: Temperatur des Wassers bei unterschiedlichen Dichten des Tassenmaterials

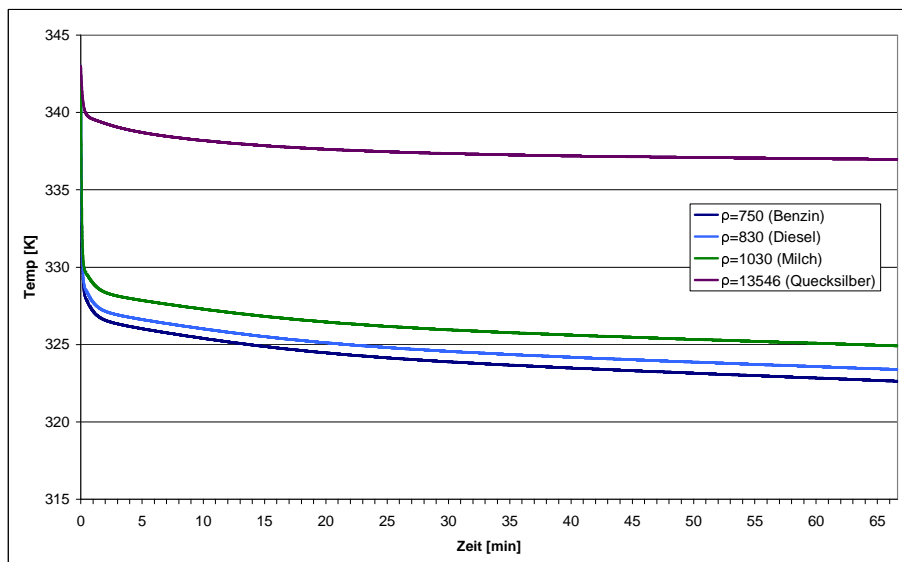
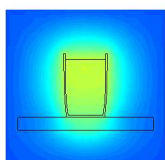


Abbildung 6.12: Temperatur der Flüssigkeit bei unterschiedlichen Dichten

wurde die Temperatur über die Zeit an einem Knoten innerhalb der Tasse bei unterschiedlichen Dichten dargestellt. Nur, dass in diesem Fall eine höhere Dichte die Temperaturleitfähigkeit der Tasse absenkt.

In welcher Weise sich das Wasser innerhalb der Tasse bei unterschiedlichen Dichten abkühlt ist in Abbildung 6.11 dargestellt. Das Wasser kühlt sich wegen der anfänglich hohen Differenz zwischen

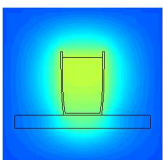


Tassen und Wassertemperatur sehr schnell ab. Hat sich die Tasse erwärmt verläuft die Abkühlung vergleichsweise langsam. Das Wasser kühlt sich also entsprechend schneller ab je größer die Wärmeleitfähigkeit und je geringer die Dichte der Tasse ist.

Dabei spielt natürlich auch die Wärmeleitfähigkeit der Flüssigkeit in der Tasse eine große Rolle. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 6.12 dargestellt. Eine geringere Dichte der Flüssigkeit führt zu einer höheren Wärmeleitfähigkeit  $a$  und damit zu einer schnelleren Abkühlung der Flüssigkeit.

### 6.4.1 Stabilität

Bei den Rechnungen mit dem Kaffeetassennetz wurde eine Zeitschrittweite von  $\delta t = 0,5s$  verwendet. Bei höheren Zeitschrittweiten kam es zu einem Oszillieren der Lösung oder zu gar keiner Lösung. Es kam also zu einer Kopplung zwischen Zeitschrittweite und Ortsdiskretisierung. Die Untersuchung der Stabilität mit Hilfe des Satzes von Lax ist aufgrund des inhomogenen Gitters sehr schwierig und soll hier nicht gemacht werden.



# Kapitel 7

## Fazit

### 7.1 Ziele und Schwierigkeiten

Zusammenfassend können wir unser Ziel, ein einfaches FEM Programm zur Simulation der Abkühlung einer Kaffeetasse zu entwickeln, als vollständig erreicht betrachten. Einige Zielstellungen, z.B. die Idee, die Ergebnisse der Rechnung auch als Film auszugeben, entstanden erst während der Implementierung des Programms. Die größten Schwierigkeiten ergaben sich bei der Transformation des 3D-Problems in ein 2D-Modell. Da das in dieser Form in einem PPM-Projekt noch nicht gemacht wurde, mussten wir die Lösung dafür erst in Zusammenarbeit mit den Tutoren finden. Schwierigkeiten ergaben sich auch aus der Komplexität des Programmcodes heraus und der damit verbundenen aufwändigen Fehlersuche. So erhielten wir Anfangs trotz einer falsch besetzten Steifigkeitsmatrix Ergebnisse im Rahmen des denkbar Möglichen. Zwar zeigen die im Kapitel Parameteranalyse errechneten Werte weiterhin größere Abweichungen zu realen Messwerten, diese lassen sich jedoch mit den getroffenen Vereinfachungen recht gut erklären.

### 7.2 Verbesserungsmöglichkeiten

In den Vereinfachungen liegen auch die ersten Ansatzmöglichkeiten für weitere Verbesserungen des Programms. Dabei betrachten wir zuerst die vernachlässigte Wärmekonvektion. Konvektion ist dadurch gekennzeichnet dass die Wärmeübertragung durch den Transport von Teilchen bewerkstelligt wird, die thermische Energie mitführen. Ursache sind also die durch den Temperaturgradienten hervorgerufenen Dichteunterschiede, die zu Auf- bzw. Abtrieb des Kaffees und der Luft führen. Die Konvektion wird nun bestimmt durch die Grenzschichten zwischen Kaffee und Tasse und zwischen Kaffee und der Luft. Die wesentlichen Parameter sind die Temperatur und die Zusammensetzung der Stoffe, sowie die Strömungsgeschwindigkeit. Die Konvektion zwischen dem Kaffee und der Tassenwand ist aufgrund der geringen Strömungsgeschwindigkeit sicherlich sehr gering aber die Konvektion zwischen dem Kaffee und der Luft ist zusätzlich mit einem Stoffaustausch verbunden, da das Wasser einen endlichen Sättigungsdampfdruck besitzt und Diffusion infolge von Partialdruckdifferenzen stattfindet. Dem Kaffee wird also ein nicht unwesentlicher Anteil an Verdampfungswärme entzogen.

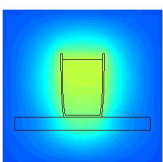
Für unsere relativ einfache geometrische Anordnung könnte der gesamte Einfluß der Konvektion an der Fläche  $A$  näherungsweise durch einen konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten berücksichtigt werden:

$$q = \alpha_{konv} A (T_0 - T_f) \quad (7.2.1)$$

Aus dem Temperaturfeld und den Strömungsgeschwindigkeiten lässt sich der konvektive Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_{konv}$  ausrechnen. Eine andere Möglichkeit besteht in der experimentellen Ermittlung dieses Koeffizienten.

Auch der Wärme- bzw. Energieaustausch durch Absorption und Reflexion elektromagnetischer Wellen, also der vernachlässigten Wärmestrahlung ist nur bei einfachen geometrischen Anordnungen einfach zu bestimmen. Durch Erweiterung des STEFAN-BOLTZMANN-Gesetzes für eine Anordnung mit dem Formfaktor  $F_{ij}$  eines Strahlers mit dem Emissionsgrad  $\epsilon$  für den von einer Fläche  $i$  auf eine Fläche  $j$  übertragenen Wärmestrom gilt:

$$q_i = \epsilon_i F_{ij} A_i (T_i^4 - T_j^4) \quad (7.2.2)$$



Um die Wärmeübertragung durch Strahlung in einer FEM Rechnung zu berücksichtigen, kann diese in einen Wärmeübergangskoeffizienten umgerechnet werden:

$$\alpha_{strahl} = \frac{q_i}{A_i(T_i^4 - T_j^4)} \quad (7.2.3)$$

Der Wärmeübergangskoeffizient für Strahlung und Konvektion kann zu einem Gesamtkoeffizienten zusammengefaßt werden, und könnte als Randbedingung an den Flächen des Tassenmodells appliziert werden:

$$\alpha = \alpha_{strahl} + \alpha_{konv} \quad (7.2.4)$$

Die dafür benötigte textscCauchy-Randbedingung haben wir im Programm bereits implementiert aber nicht genutzt.

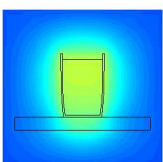
Weitere Verbesserungsmöglichkeiten bestehen in der Einbeziehung der Temperatur- und Ortsabhängigkeit der Materialparameter  $\lambda(T, \bar{x})$  und  $\rho(T)$ . Die zugrundeliegende Wärmeleitungsdifferentialgleichung ist dann aber nicht mehr so einfach integrierbar.

Um nicht rotationsymmetrische Tassen zu untersuchen, müssten dreidimensionale Volumenelemente verwendet werden, da die Reduzierung auf ein 2D Problem in diesem Fall nicht mehr möglich wäre.

Um die Orts- und Zeitauflösung weiter zu verbessern, könnte man innerhalb der Grenzen von Rechenleistung und Stabilität das Netz verfeinern und die Zeitschrittweite  $\delta t$  verringern.

### 7.3 Kritik der Lehrveranstaltung

Besonders gut haben uns die individuellen wöchentlichen Sprechstunden mit den Tutoren gefallen. Aus diesen Sprechstunden haben wir auch den Großteil an Wissen und Motivation für die Verwirklichung des Projekts erhalten. Diese an der TU seltene intensive Betreuung könnte ruhig noch weiter ausgebaut werden. Das in den Blockveranstaltungen vermittelte Wissen wurde unserer Meinung nach etwas zu komprimiert vorgetragen. Die Gruppenarbeit fanden wir in sofern sehr sinnvoll, als dass die laufende Diskussion in der Gruppe über das Thema dem Lernen sehr zuträglich war. Trotz sehr motivierter Gruppenmitglieder fehlte es uns aufgrund der schwierigen Terminfindung zwischen 4 Studenten teilweise etwas an Effizienz. Insgesamt fanden wir das Projekt wesentlich sinnvoller als eine Lehrveranstaltung mit Frontalunterricht.

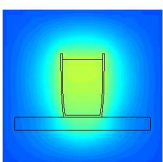


# Anhang A

## Verzeichnisse

### A.1 Größenverzeichnis

Formelzeichen	Bedeutung	Einheit
$\dot{q}$	Wärmestromdichte	[W]
$\dot{Q}$	Summe der Wärmestromdichte	[W]
$\dot{q}_R$	Wärmestromdichte einer NEUMANN-Randbedingung	[W]
$\dot{q}_E$	Wärmestromdichte einer Wärmequelle	[W]
$\lambda$	Wärmeleitzahl	$\left[\frac{W}{mK}\right]$
$c$	spezifische Wärmekapazität	$\left[\frac{J}{KgK}\right]$
$\rho$	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
$\alpha$	Wärmeübergangskoeffizient	$\left[\frac{W}{m^2K}\right]$
T	Temperatur	[K]
$u_k$	Temperatur am Knoten $k$	[K]
$\psi(\underline{x})$	Testfunktion	-
$f_k^*$	nicht normierte Formfunktion am Knoten $k$	-
$f_k$	normierte Formfunktion am Knoten $k$	-
<b>m</b>	Massenmatrix eines Elementes	$\left[\frac{Ws}{K}\right]$
<b>s</b> <sup>(<i>l</i>)</sup>	Steifigkeitsmatrix des Elementes $l$	$\left[\frac{W}{K}\right]$
<b>s</b> <sub><i>ij</i></sub> <sup>(<i>l</i>)</sup>	Steifigkeitsmatrixeintrag des Elements $l$ an der Position $ij$	$\left[\frac{W}{K}\right]$
$\underline{p}$	Lastvektor eines Elementes	[W]
$p_i^l$	Eintrag im Elementlastvektor des Elementes $l$ an der Position $i$	[W]
<b>M</b>	Gesamtelementmassenmatrix	$\left[\frac{Ws}{K}\right]$
<b>S</b>	Gesamtelementsteifigkeitsmatrix	$\left[\frac{W}{K}\right]$
<b>S<sub>C</sub></b>	CAUCHY-Anteil der Gesamtelementsteifigkeitsmatrix	$\left[\frac{W}{K}\right]$
$\underline{p}$	Gesamtelementlastvektor	[W]
<b>M</b> *	Systemmassenmatrix	$\left[\frac{Ws}{K}\right]$
<b>S</b> *	Systemsteifigkeitsmatrix	$\left[\frac{W}{K}\right]$
<b>S</b> <sub><i>ij</i></sub> *	Systemsteifigkeitsmatrixeintrag an der Position $ij$	$\left[\frac{W}{K}\right]$
$\underline{p}^*$	Systemlastvektor	[W]
<b>J</b>	Jacobideterminante	-
$\Theta$	Gewichtungsfaktor der Zeitdiskretisierung	-
t	Zeit	[s]
<b>a</b> <sup>(<i>l</i>)</sup>	Zuordnungsmatrix eines Elementes	-
<b>A</b>	Zuordnungsmatrix	-



# Literaturverzeichnis

- [1] FEM und Wärme, Projektgruppe Praktische Mathematik, TU Berlin, Mai 2004
- [2] Berechnung instationärer Wärmeleitungsvorgänge mit der Methode der Finiten Elemente, Studienarbeit, Marc Cyrzan, TU Berlin, April 2002
- [3] Numerik für Ingenieure I, Vorlesungsskript, Volker Mehrmann überarbeitet Fassung von Matthias Bollhöfer, TU Berlin, März 2004
- [4] Numerische Mathematik II für Ingenieure, Vorlesungsskript, Matthias Bollhöfer, TU Berlin, September 2003
- [5] Numerische Mathematik, Hans R. Schwarz und Norbert Köckler, Teubner Verlag, Stuttgart, 1997
- [6] Praktische Mathematik für IngenieurInnen - Lineare Gleichungssysteme, Projektgruppe PRaktische Mathematik, TU Berlin, Februar 2000
- [7] Berechnung des Gradienten einer affinen Funktion auf einem Dreieck. Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix. , Michael Karow, TU Berlin, Mai 2004
- [8] Finite Elemente. Eine Einführung für Ingenieure, Klaus Knothe und Heribert Wessels, Springer, Berlin, Januar 1999
- [9] Finite Elemente, Dietrich Braess, Springer, Berlin, März 2003
- [10] Finite-Elemente-Methoden, Klaus-J. ÅErgen Bathe, Springer Verlag, Berlin, Januar 2002
- [11] Springers Mathematische Formeln, Lennart Rade und Bertil Westergren, Springer Verlag, Berlin, September 2000
- [12] VDI-Wärmeatlas, VDI-Gesellschaft Verfahrenstechnik u. Chemieingenieurwesen, Springer Verlag, Berlin, Januar 1994
- [13] Thermodynamik für Ingenieure, Peter Jany und Eugen Sapper, Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, Mai 2001
- [14] Das C++-Kompendium, Gilbert Brands, Springer Verlag, Berlin, September 2004
- [15] C von A bis Z, Jürgen Wolf , Galileo Computing, 2006
- [16] <http://c-buch.sommergut.de/>, Wolfgang Sommergut
- [17] <http://de.wikibooks.org/wiki/C-Programmierung>, Online Enzyklopädie

